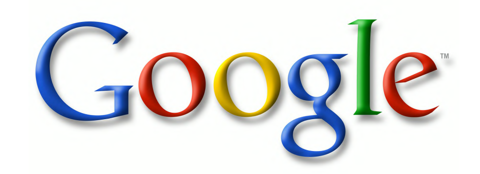
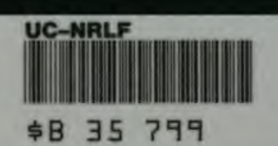
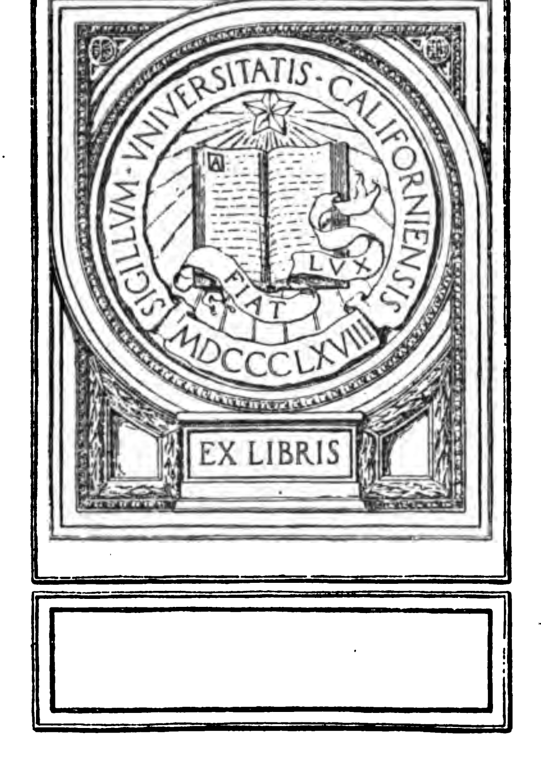
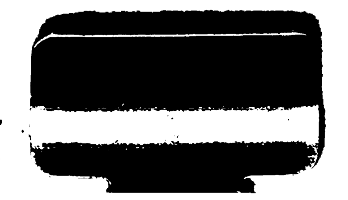





UC-NRLF
$B 35 799


SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
FIAT LVX
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS



Ausführliches Lehrbuch

der

analytischen

oder

Höhern Geometrie

zum Selbstunterricht.

Mit Rücksicht auf das Nothwendigste und Wichtigste

bearbeitet von

H. B. Lübsen.

> Die Sprache der Analysis, die vollkommenste aller Sprachen, ist schon an sich selbst ein mächtiges Hülfsmittel und Werkzeug der Entdeckung. Laplace.

Mit 122 Figuren im Text.

Elfte unveränderte Auflage.

Leipzig.
Friedrich Brandstetter.
1876.

Im Fleiss kann Dich die Biene meistern,
In der Geschicklichkeit ein Wurm Dein Lehrer sein,
Dein Wissen theilest Du mit vorgezogenen Geistern.
Die Kunst, o Mensch, hast Du allein.

Schiller.



Vorwort.

Dass die höhere Mathematik, als deren Aufgabe die analytische Behandlung des Continuums angesehen werden kann, dem Anfänger grosse Schwierigkeiten darbieten werde, beweist schon die Geschichte der Wissenschaft. Der bewundernswürdige Scharfsinn und die eminente Genialität der griechischen Mathematiker brachten es weder zu allgemeinen Methoden noch zu einer systematischen Uebersicht. Einen bedeutenden Schritt vorwärts that die Wissenschaft durch die analytische Geometrie, deren Grundbegriffe wir Cartesius verdanken. Obgleich sich nun diese noch lange nicht zu der Allgemeinheit der Betrachtung erhob, wie die Differential- und Integralrechnung, so war der Fortschritt trotz der allgemeinen Arithmetik und der Trigonometrie ein so gewaltiger, dass sie dem Anfänger als etwas Fremdartiges und Neues entgegentritt. Die Methoden sind von der Elementargeometrie gänzlich verschieden und nehmen in gewissem Umfange schon einen so allgemeinen Standpunkt ein, dass die energischste Aufmerksamkeit aufgeboten werden muss, um ihren Sinn richtig zu fassen und in demselben zu arbeiten. Wer daher die analytische Geometrie mit Hülfe eines Buches studiren muss, ein Fall der in unserer Zeit sehr häufig vorkommt, muss daher in der Wahl desselben vorsichtig sein. Solche Anfänger hatte der Verfasser im Auge und suchte ihnen das Verständniss auf alle mögliche Weise zu erleichtern, nicht durch Verzichtlei-

stung auf die Strenge der Wissenschaft, denn wer einen wissenschaftlichen Vortrag nicht verstehen kann, wird einen unwissenschaftlichen um so weniger begreifen, sondern durch möglichste Deutlichkeit und Klarheit in der Darstellung, durch sorgsame Exemplification der neuen Begriffe und durch allmälige Ueberführung in die Vorstellungsweise der Wissenschaft und ihre allgemeinen Standpunkte. Er hofft daher, nicht nur dem Anfänger einen Dienst zu leisten, sondern auch der methodischen Behandlung des Unterrichts einige Hülfe darzubieten.

Hamburg.

H. B. Lübsen.



Einleitung.

Von der analytischen oder höhern Geometrie, in welche wir den gehörig vorbereiteten Anfänger, der für mathematische und philosophische Speculationen Sinn und Anlage hat, hiemit einführen wollen, können wir unbedenklich behaupten, dass sie einer der schönsten Theile der Mathematik und sowohl in practischer Hinsicht wichtig, als auch in rein wissenschaftlicher und geschichtlicher Hinsicht höchst interessant und merkwürdig ist.

Wichtig ist sie, auch abgesehen von ihrem practischen Nutzen, schon deshalb, weil man es nicht unternehmen darf, ohne ihre Kenntniss irgend ein bedeutendes Werk über höhere Theile der angewandten Mathematik, Astronomie, Mechanik und Naturwissenschaft in die Hand zu nehmen.

In wissenschaftlicher Hinsicht ist sie aber schon deshalb interessant und merkwürdig, weil sie uns zeigt, wie durch einen einzigen glücklichen Einfall, durch einen höchst einfachen und nahe liegenden Gedanken eine beinahe für geschlossen gehaltene Wissenschaft, (die Geometrie) nach einem fast zweitausendjährigen Stillstande, auf einmal eine Erweiterung ohne Grenzen nimmt und eben dadurch eine Ahnung von der Fülle der Kenntnisse giebt, welche in dieser Richtung, durch mehrere solche glückliche Gedanken, dereinst zu erlangen, die Menschen sich schmeicheln dürfen, eine Ahnung von der stets wachsenden Kraft des Geistes giebt, die uns aus einer Sinnenwelt in eine rein geistige Begriffswelt hebt, die keiner Sinne mehr bedarf.

In der Geschichte der Wissenschaften sehen wir die höhere Geometrie, aus dem unermesslichen Reiche der Gedanken, gleich einer neuen ungeahneten Sonne über den Horizont der Euklidischen Geometrie emporsteigen und ein unabsehbares, aber den Menschen zugängliches neues Feld der Erkenntnisse beleuchten, dessen Dasein und Möglichkeit sich die kühnste Phantasie nicht geträumt hatte.

Die Geschichte der Wissenschaften ist die eigentliche Geschichte des menschlichen Geistes, und ihre allmälige Entwickelung, vom Keime an, zeigt uns die allmälige Entwickelung des Geistes. Die Menschheit wächst mit den Erkenntnissen und wird vollkommener mit ihnen; und eben deshalb ist die Geschichte der Wissenschaften so lehrreich und erhebend. Sie lässt an keinen Stillstand, nur an steten Fortschritt denken. Ein Gedanke gebiert den andern; sie erzeugen sich fort und fort; tragen hundert- und tausendfältig; und so lange noch immer neue Tage auf einander folgen, werden auch immer noch neue Gedanken auf einander folgen; ihre Quelle ist unerschöpflich, wie die Zeit.

Aber viele Gedanken und Zeit gehören auch dazu, um eine ganze Wissenschaft zu bilden. Sie ist nicht das Werk eines Einzigen. Viele Geisteskräfte mussten erst wirksam werden und ihr Scherflein dazu beitragen, um von dem ersten Grundgedanken zu den höhern, zu einem wissenschaftlichen System zu gelangen. Jeder hat da seine eigenen Ansichten und Verfahrungsweise, und deshalb kann nicht gleich Alles wie aus einem Guss erscheinen. Erst nach und nach kommt, durch Verständniss und Uebereinkunft, Ordnung und System hinein. — Eine spätere Entdeckung zeigt oftmals einen viel kürzern und leichtern Weg; nicht immer wird von den ersten Erfindern gleich der bequemste eingeschlagen. Neue Erfindungen machen alte schwerfällige Sachen wieder entbehrlich.

Mit der allmäligen Verbesserung der Systeme und Methoden in den Wissenschaften verhält es sich, gleichnissweise, wie mit der Verbesserung der Wege. Dies gilt namentlich auch von der höhern Geometrie, wie eine Vergleichung der neuern Werke darüber mit den ältern zeigt.

Der erste Begründer dieser Wissenschaft war der berühmte Descartes;*) auch hat er uns darüber ein Werk hinterlassen, jedoch darin nicht ausgesprochen, was seine grosse Seele bewegte, als der seitdem so fruchtbar gewordene Gedanke in ihm aufstieg: die räumlichen Grössen analytisch (arithmetisch) aufzufassen. Dies Werk hat zwar immer noch grossen geschichtlichen Werth, passt aber deshalb nicht für den Unterricht, weil es dem gegenwärtigen Zustand der Wissenschaft nicht mehr angemessen ist, und weil es keine für den ersten Anfänger

*) Renatus Cartesius, geboren zu la Haye in Touraine 1596, gestorben in Stockholm 1650.

passende Einleitung hat. Wir halten aber eine Einleitung, welche zuvor dem Anfänger einen ungefähren Begriff von dem Wesen der Wissenschaft giebt, ihren Zweck errathen lässt und vorbereitet, gleichsam seinen Geist erst operirt, die zu erforschenden und zu bearbeitenden Gegenstände hervorhebt und mit ihm bespricht, für die Hauptsache und wollen deshalb versuchen, hier eine solche zu geben.

Die ursprüngliche oder sogenannte Euklidische Geometrie, so wie sie uns von den Alten überliefert worden und von den Neuern vervollkommnet nun vor uns liegt, ist gewiss eine höchst merkwürdige Schöpfung des menschlichen Geistes und ein unauslöschliches Denkmal desselben, eine nicht wegzuläugnende Thatsache einer geistigen Natur des Menschen und Beweis, dass im Denken ein wirkliches Fortschreiten möglich ist. Die Mathematik zeigt es klar, wie viel der Mensch ohne Hülfe der Sinne, durch blosse Geisteskraft, zu leisten vermag.

Wie weit mag nun aber dieses Denken im mathematischen Sinne wohl gehen und ist namentlich die Wissenschaft von den räumlichen Grössen durch die erwähnte Euklidische Geometrie erschöpft und abgeschlossen, oder können wir sie noch weiter fortspinnen, und wenn dies wäre — und so muss es wohl sein, denn eine organische Wissenschaft ist von selbst unendlich — auf welche Weise? — Wollen wir noch mehrere Eigenschaften des Dreiecks aufsuchen, als wir bereits kennen — und es wird deren gewiss noch viele geben — oder wollen wir die, noch fast völlig unbekannten, Eigenschaften des Vierecks, Fünfecks etc. entdecken, oder wie beim Dreieck eine Trigonometrie, so beim Viereck eine Tetragonometrie oder gleich eine Polygonometrie erfinden? Hierin könnte allerdings etwas gethan werden, wie es zum Theil auch schon geschehen ist.

Das ist es aber nicht, was wir wollen. Denn in dieser Richtung geforscht und gearbeitet, hiesse offenbar die Euklidische Geometrie verdichten, auf einem und demselben Gebiete des Wissens bleiben. Wir wollen aber die Bahn weiter fortführen in ein anderes Gebiet und auch krumme Gestalten erfinden und kennen lernen.

Die Euklidische Geometrie erfindet und betrachtet nämlich nur lauter eckige, gradlinigte, mit Lineal und Zirkel construirte Figuren. Die Natur construirt, so scheint es, manche ihrer Gestalten auch auf diese Euklidische Weise mit Zirkel und Lineal. Wir finden z. B. viele eckige und gradlinigte Constructionen in der Kristallographie, die geometrisch genauen, dem Ideal gleichen,

Tetraeder, Hexaeder etc., die regelmässigen Schneeflocken u. a. m. Allein die Natur bleibt bei dieser Elementar-Geometrie nicht stehen; sie geht weit darüber hinaus und zeigt uns eine unendliche Menge von Gestalten, die nicht mit Zirkel und Lineal construirt sein können. In der organischen Natur findet man nichts Gradlinigtes und Scharfeckiges. — Und alle diese zahllosen Gestalten, welche die Natur uns zeigt, können nicht vom Zufall construirt, d. h. nicht ohne irgend eine (wirkende) Ursache oder Ursachen entstanden sein. Die auffallend regelmässigen Gestalten der Blumen und Blätter und ihre nach merkwürdigen arithmetischen Gesetzen geordneten Stellungen am Stengel haben sich nicht willkürlich gebildet. Es waren Kräfte dabei thätig, und die können nie gesetzlos wirken, sie mögen nun nach grader Linie oder wie immer treiben.

Fällt ein Stein in's Wasser, so sind die Kreise, welche die Natur um ihn construirt, in Folge dieser einzigen, nach grader Linie wirkenden Kraft und des wundervollen Wesens der Flüssigkeit, eben so gesetzmässig bestimmt, als die Gestalt der Wellen.

Die Erde bewegt sich um die Sonne nicht ad libitum. Das von Newton entdeckte Gravitationsgesetz hat ihre krumme Bahn genau abgemessen und ihr die Formel vorgeschrieben, nach welcher sie sich bewegen muss.

Nichts in der Natur geschieht gesetzlos, von selbst. Alles ist vollkommen bestimmt, wie schon das Buch der Weisheit sagt: „Alles ist geordnet mit Maass, Zahl und Gewicht und die Gesetze sind ohne Wandel". Unsere Naturwissenschaften bestätigen diese Behauptung des weisen Mannes vollkommen. Auch ist schon mit diesen aufgestellten mathematischen Begriffen: „Zahl, Maass und Gewicht" klar ausgesprochen und darauf hingedeutet, dass die hiedurch ausgedrückten Naturgesetze nur mathematisch aufgefasst werden können.

Hegt die Natur aber Gesetze, die sich mathematisch auffassen lassen, so liegen sie bereits vor ihrer Entdeckung auch schon in der Mathematik. Und daher kommt's, dass die Speculation, sowohl absichtlich, als auch ganz absichtslos, der Erfahrung oft voreilt und vorarbeitet und mathematische Gesetze entdeckt, die man hernach auch in der Natur findet, und die man ohne diese Vorarbeiten nicht gefunden haben würde. Das Gesetz einer arithmetischen Reihe fand Galiläi im freien Fall der Körper, und Kepler die schon 2000 Jahre bekannte Ellipse in den Bahnen der Gestirne; Halley entdeckte absichtlich die Bahnen der Kometen, Adams und Le Verrier die Existenz und den Ort des

Planeten Neptun, und Schwerd Beugungserscheinungen des Lichts. Auch das noch unbekannte Gesetz der Primzahlen mag in der Natur existiren. Cartesius rief eine Mannigfaltigkeit merkwürdiger Gestalten aus abstracten Zahlen hervor.

Die Natur, sagt Plato, übt immer Mathematik. Wirft man einen Körper durch die Luft, oder kommt ein Sonnenstrahl zu uns, so sind die krummen Bahnen, welche sie beschreiben, nicht zufällig, sondern vollkommen bestimmt, wie dies die höhere Mechanik bereits gezeigt. In vielen Fällen ist es nämlich den Menschen schon gelungen, die Function zwischen Ursache und Wirkung der Natur abzulauschen und daraus die Formel abzuleiten, nach welcher die Ursachen wirken, zukünftige Natur-Erscheinungen vorauszusagen und auf gegenwärtige aufmerksam zu machen, welche der Erfahrung sonst entgehen und nimmer bemerkt werden würden. Dies gilt namentlich von den beiden vollendetsten Theilen der Naturwissenschaft, Astronomie und Optik.

Die Natur schafft und construirt nach unwandelbaren Gesetzen, und diese Gesetze mathematisch aufzufassen, eine Wissenschaft daraus zu bilden, und sich dieselben dienstbar zu machen, ist das stete Streben der Naturforscher. Etwas Regelloses lässt sich, von selbst verstanden, nicht in eine unwandelbare Regel bringen. Gäbe es also in der Natur keine bestimmte unwandelbare Gesetze, dann wäre auch an keine wissenschaftliche Auffassung derselben, an keine das wundervolle Spiel der Natur begreifende Wissenschaft zu denken. Wo es aber wirkende Ursachen giebt, da giebt es nothwendig auch Gesetze, nach welchen die Wirkungen erfolgen müssen, und es wird, wie Gauss sagt: „der Triumph der Wissenschaft sein, wenn es dereinst gelingt, das bunte Gewirr der Erscheinungen zu ordnen, die einzelnen Kräfte, von denen sie das zusammengesetzte Resultat sind, auseinander zu legen, und einer jeden Sitz und Maass nachzuweisen.“

Um aber den Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung echt wissenschaftlich auffassen zu können, müssen wir offenbar erst die dazu erforderliche Wissenschaft haben. — Ohne die vorher erfundene Elementar-Geometrie hätten wir unmöglich die regelmässigen Gestalten, welche die Natur uns in der Kristallographie zeigt, richtig erkennen und bewundern, noch viel weniger einsehen können, weshalb sie von den sogenannten regelmässigen Körpern nicht mehr als fünf schaffen kann. Ohne die zuvor erfundene Trigonometrie würden wir in der Astronomie, Geographie, Schifffahrtskunde etc. fast noch auf dem Standpunct

der Alten sein. Bevor man nicht das arithmetische Gesetz der Primzahlen durch reine Speculation gefunden, kann man es auch nicht in der Natur entdecken.

So ist es nun auch hier. Wollen wir die Constructionen in der Natur, die ausserhalb der Euklidischen Geometrie fallen, wissenschaftlich auffassen, so müssen wir erst eine neue Geometrie erfinden, und obgleich hiemit schon das Bedürfniss und practische Interesse derselben ausgesprochen ist, so muss doch diese neue Wissenschaft, im Platonischen Sinne, unbekümmert um ihre Anwendbarkeit und Nützlichkeit, sich erst selbstständig um ihrer selbst willen entwickeln.

Der Geist muss sich nicht von Aussen, durch niederes Interesse anregen lassen, sondern sich (ohne ängstliche Rücksicht auf den practischen Nutzen), durch eigene Kraft, aus freier Lust, von Innen heraus entfalten. Componisten, Dichter und Maler schaffen auch aus innerem Triebe, unbekümmert ob es practisch nützt, oder von der sichtbaren Natur abweicht. Sollte der Componist in seinen Melodien durchaus die Natur nachahmen, so hätten wir gar keine Melodien, und sollten Dichter und Maler immer im Sinnenlande bleiben, so hätten wir nur Copisten, die, je nachdem sie treffen, eine mehr oder minder schöne Hand schreiben, aber nichts gäben, was aus einer rein geistigen Quelle geflossen wäre; denn dadurch eben offenbart sich der Geist, dass er Meister wird über die Kräfte der Natur, und dass er vor Allem etwas erfindet und schafft, was noch nicht da ist.

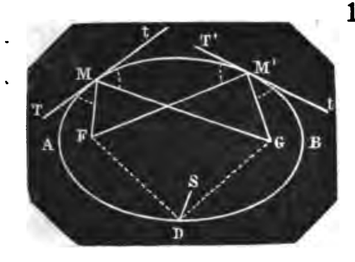
Wir sind nun aber am Eingange der neuern Geometrie, ehe wir jedoch den Anfänger einführen und ihm den erwähnten höchst einfachen Cartesianischen Grundgedanken verrathen können, sind zum richtigern und leichtern Verständnisse erst noch einige andere Puncte zu besprechen.

Im Vorhergehenden sind wir durch theoretische und practische Gründe belehrt, dass wir den Stoff der zu bildenden neuen Geometrie, nämlich neue gesetzmässig gebildete krummlinigte Gestalten, nothwendig selbst erfinden müssen, denselben aus der Natur weder nehmen können noch dürfen. Diese Aufgabe muss zuerst gelöst werden.

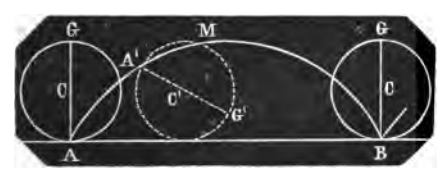
Neue Gestalten wären nun wohl leicht zu bilden, weil schon jeder beliebige Namenszug eine solche sein könnte, und weil er nicht durch Zufall entstanden, gewiss auch eine gesetzmässige sein würde. Weil wir aber das geheime und verwickelte Spiel der Nerven, welches bei der Bildung eines solchen launenhaften Zuges waltete, nicht kennen, so kann derselbe deshalb auch

keiner wissenschaftlichen Betrachtung fähig sein, und wir dürfen daher nur solche Züge gesetzmässig gebildete nennen, die wir, so oft wir wollen, von Neuem ebenso wieder erzeugen können. Dazu ist dann aber offenbar erforderlich, uns des bestimmten Gesetzes, nach welchem unsere construirende Phantasie geleitet wird, deutlich bewusst zu sein, und unsere erste Aufgabe kommt also darauf zurück, bestimmte Bildungsgesetze zu erfinden.

Schon eine ganz arme Phantasie könnte in dieser Hinsicht etwas schaffen, und leicht einige Bildungsregeln ersinnen; z. B. die folgenden:

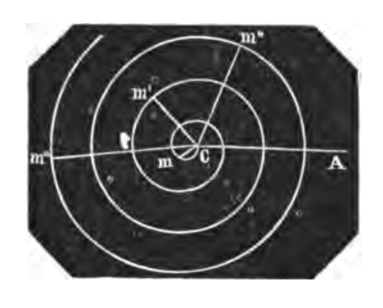


1. Ein mit seinen beiden Enden in zwei Puncten F und G befestigter Faden FDG werde mittelst eines Stiftes SD straff gespannt und so von D nach A, M, M', B, D, also um die beiden Puncte F, G, ganz herum geführt, alsdann beschreibt der den Faden stets straff spannende Stift SD offenbar keine zufällige, sondern eine durch die Länge des Fadens und den Abstand der beiden festen Puncte F und G vollkommen bestimmte gesetzmässige krumme Linie, die sogenannte Ellipse, welche wir auf dieselbe Weise, so oft wir wollen, wieder beschreiben können.



2. Ein Kreis (Rad) C wälze sich auf einer graden Linie AB, alsdann wird ein beliebiger Punct desselben, z. B. der untere, A, von unten nach oben und dann wieder nach unten kommend, eine durch die Grösse des Kreises C vollkommen bestimmte gesetzmässige krumme Linie AMB, die sogen. Cycloide (Radlinie) beschreiben, die sich durch besondere Eigenschaften von der vorhergehenden unterscheiden wird.

3. Eine Linie CA, von unbestimmter Länge, drehe sich wiederholt um den festen Punct C, zugleich trete aus diesem ein anderer Punct *m* und bewege sich so auf der drehenden Linie, dass sein Fortschritt darauf der Drehung stets proportional ist, so z. B. dass die Fortschreitung für jeden Grad der Drehung



$\frac{1}{36}$ Zoll beträgt, alsdann wird die spiral- oder schneckenförmige Spur, welche durch dieses Gesetz der auf der drehenden Linie C A fortschreitende Punct *m* zu beschreiben genöthigt ist; offenbar eine völlig bestimmte, mit immer grösseren Windungen ins Unendliche fortgehende krumme Linie C m m, m''.... bilden.

Und so könnte man auf diese Weise leicht noch einige andere gesetzmässige Züge mehr ersinnen. Auch sind bereits die Alten, namentlich Archimedes und Appollonius, denen diese krummen Linien schon bekannt waren, in der Erfindung solcher Bildungsgesetze, nicht allein noch einige Schritte weiter gegangen, sondern sie haben auch, sich mit den blossen Phantasiegebilden nicht begnügend, auf eine sehr scharfsinnige Weise, durch Hülfe der gradlinigten Geometrie, manche merkwürdige Eigenschaften solcherweise erzeugter Gestalten entdeckt, so z. B. dass jede an einen beliebigen Punct M der ersten Figur (Pag. 7) gezogene Berührungslinie T t, mit den von den beiden festen Puncten F und G dahin gezogenen Linien gleiche Winkel macht, nämlich TMF = tMG, ebenso T'M'F = t'M'G etc., welche Eigenschaft dieser Linie (Ellipse) von den Neuern in der Lehre der Optik und Akustik practisch benutzt worden ist. (Ein nach einer solchen krummen Linie geformtes, sogenanntes elliptisches, glattes Gewölbe hat z. B. die Eigenschaft, dass alle Schall-, Wärme-, und Lichtstrahlen, welche von dem einen der beiden festen Puncte F, G ausgehen, nach dem andern reflectirt werden. Eine Uhr in dem einen Punct hört man in dem andern Punct deutlich ticken. Ist das Gewölbe spiegelglatt, so würde eine mässige Hitze in dem einen Punct ein Stück Schwamm in dem andern entzünden u. dgl. m.)

So schätzbar aber diese Erweiterungen der Geometrie für damalige Zeiten schon sein mussten, und so merkwürdig es in geschichtlicher Hinsicht noch ist, dass die Alten (vor 2000 Jahren), obgleich mit der gradlinigten Euklidischen Geometrie noch nicht mal ganz fertig, schon den Drang fühlten, darüber hinaus zu gehen, so war doch ihre Methode zum kühnen und raschen Bau einer neuern, höhern Geometrie nicht geeignet

Denn erstlich, und dies ist noch der kleinste Vorwurf, leuchtet schon dem Anfänger ein, dass das eben benutzte Schöpfungsmittel neue räumliche Grössen zu erfinden, die Phantasie nämlich, zu bald erschöpft sein würde, jedenfalls nicht wissenschaftlich wäre, weil hier die Erfindung eines neuen Bildungsgesetzes jedesmal von einem glücklichen Einfall, von einer steten Inspiration abhängt. Man erfinde auf diese Weise noch hundert, tausend und mehrere neue Bildungsgesetze, es muss dies der Phantasie doch immer schwerer und schwerer werden, und sie muss zuletzt ganz ermüden. Es verhält sich hier, gleichnissweise, wie in der Arithmetik mit der Zahlenbildung. Wir würden nicht so weit zählen können, als wir wollen, wenn wir — was doch noch weit leichter sein müsste — für jede folgende Zahl ein neues eigenthümliches Wort erfinden müssten; das schon würde die lebhafteste Phantasie nicht können. Wir würden nicht so unendlich viele verschiedene Producte bilden können, wenn wir — was um nichts schwerer sein könnte — für jedes neue Product ein neues Bildungsgesetz erfinden müssten.

Wir sehen an diesen einfachen Beispielen, dass die Wissenschaft die fruchtbarste Phantasie in der Schöpfungskraft überbietet. Indessen wollen wir in der Erfindung neuer gesetzmässig gebildeter Gestalten keineswegs auf die Gaben der Phantasie verzichten, wir können sie, sowohl zu diesem, als zu manchem andern geometrischen Zwecke, sehr gut gebrauchen, nur wollen wir den Reichthum unserer Wissenschaft an neuen Gestalten nicht von ihr abhängen und begrenzen lassen, sondern auf echt wissenschaftlichem Wege eine von selbst fliessende unerschöpfliche Quelle von Bildungsgesetzen erfinden. Dass es eine solche giebt, woraus die grösste Mannigfaltigkeit von zahllosen bunten Gestalten hervorgeht, und dass sie aus einer ganz fremdartigen Wissenschaft, aus der Arithmetik, entspringt, werden wir bald sehen, so unglaublich und unmöglich dies jetzt auch noch klingen mag.

Der grösste Vorwurf aber, der die ältere Methode trifft, ist ihre grosse Schwerfälligkeit und Weitläufigkeit, insofern es auf den Hauptzweck, auf die Untersuchung der krummlinigten Gestalten, Entdeckung ihrer Eigenschaften, Ausmessung etc. ankommt. Wir wissen, auf welche indirecte Weise, durch welche höchst langweilige und mühsame Rechnungen wir in der Elementar-Geometrie zur Kenntniss des Umfangs und Inhalts des Kreises gelangten, einer Figur, welche eigentlich in die höhere Geometrie gehört.

Auf fast ähnliche Weise, wie hier den Kreis, untersuchten die Alten alle andern krummlinigten Gestalten durch Hülfe der Euklidischen Geometrie, und durch ihre schwerfällige, jeden kühnen Fortschritt hemmende sog. synthetische und Exhaustions-Methode. Jede andere Gestalt erforderte eine andere Betrachtungsweise und neue Kunstgriffe. Die meisten Entdeckungen hingen von glücklichen Einfällen, vom Zufall ab. Kurzum, es fehlte den Alten eine wissenschaftliche, auf alle gesetzmässig gebildete Gestalten anwendbare Untersuchungsmethode. — So wie man z. B. in der Elementar-Geometrie nach einer und derselben allgemeinen Methode (nämlich durch Zerlegung in Dreiecke) den Inhalt einer jeden in noch so beliebigem Zickzack gradlinigt begrenzten Figur findet, so muss auch in der höhern Geometrie eine allgem. Methode erfunden werden, nach welcher man den Inhalt einer jeden gesetzm. krummlinigt begrenzten Figur findet; eine andere, nach welcher man die Umfänge derselben findet etc.

Solche allgemeine Methoden aber konnten die Alten deshalb unmöglich haben, weil zu ihren Zeiten die eigentliche Seele der höhern Geometrie, die Analysis, noch nicht geboren war. Selbst zu Cartesius Zeiten, 2000 Jahre später, lag diese, nachher so mächtig gewordene, durchlauchtige Analysis noch in ihren Windeln, und Cartesius selbst konnte unmöglich voraussehen, wie weit schon, erst hundert Jahre nach ihm, die Wissenschaft kommen würde, zu welcher er den Grund gelegt.

Dass die Analysis den Schlüssel zur Erfindung räumlicher Grössen, Entdeckung ihrer Eigenschaften, Ausmessung etc. enthält, kann, ungeachtet der grossen Verschiedenheit der beiden Wissenschaften, Arithmetik und Geometrie, doch nicht so unglaublich mehr sein, da wir die Kraft und Hülfe derselben bereits in der Trigonometrie, oder noch früher bei der Anwendung der Arithmetik auf Geometrie erfahren, wo wir Eigenschaften und merkwürdige Beziehungen unter räumlichen Grössen gleichsam herausrechneten; z. B. die Formel zur Bestimmung des Inhalts eines Dreiecks, aus dessen drei Seiten; so wie die Radien der ein- und umgeschriebenen Kreise etc. Auch haben beide, bei ihrer grossen Verschiedenheit, in gewisser Hinsicht doch auch eine grosse Aehnlichkeit mit einander und man könnte, insofern sich überhaupt das Wesen einer ganzen Wissenschaft in wenig Worten zusammenfassen liesse, die eine fast mit denselben Worten, wie die andere, erklären: Die Geometrie ist nämlich die Wissenschaft von der Bildung, von den Eigenschaften, Ausmessung, Umformung, Zusammenfassung, Theilung etc. der

räumlichen und die Arithmetik (Analysis) die Wissenschaft von der Bildung, von den Eigenschaften, Ausmessung, Umformung, Zusammenfassung, Theilung etc. der unstetigen Grössen. Und diese Aehnlichkeit und Verwandtschaft ist es eben, vermöge welcher diese beiden Elemente eine Verbindung mit einander eingehen können, welche Cartesius so geschickt zu vermitteln und daraus ein neues Product, die höhere Geometrie zu erzeugen wusste.

Auf welche höchst einfache Weise er dies that, wollen wir jetzt zeigen, zuvor aber den Anfänger noch an die Geschichte von Columbus' Ei erinnern, damit er Cartesius Verdienste, welche in jeder Hinsicht nicht geringer, als die des Weltentdeckers sind, besser zu würdigen weiss, und, nachdem ihm der Gedanke verrathen; nicht, wie jene einfältige Grandezza, sagt: das hätte ich auch gekonnt.

Cartesius, bei seinen Forschungen in der krummlinigten Geometrie durch das schwerfällige Verfahren der Alten belästigt, und wohl einsehend, dass er auf diese nachahmende Weise nicht rasch vorwärts kommen und kein Licht der Welt werden könne, was doch sein fester Wille war, entschloss sich kurz und gut, Zirkel, Lineal und Synthesis, mithin die ganze alte Methode (unbeschadet der heiligen Ehrfurcht gegen das Alterthum), an den Nagel zu hängen und folgende ganz neue analytische Methode einzuschlagen.

Sei, möge er gesagt haben, y gleich dem jedesmaligen Betrag, den ein aus der an sich unbestimmten Grösse x beliebig gebildeter Grössenausdruck giebt, indem man darin für x allerlei bestimmte Zahlen setzt, sei z. B.:

$$y = x^2 + 3x - 2$$

Nehmen wir in dieser Gleichung, in welcher die beiden Grössen x, y noch unbestimmt sind, für x einen bestimmten Werth an, so wird wegen des Zusammenhangs derselben auch die andere Grösse y einen bestimmten Werth erhalten.

Setzen wir z. B. statt x die Zahl 2, so wird:

$$y = 2^2 + 3 . 2 - 2$$
$$\text{oder } y = 8$$

Setzen wir $x = 0$, so wird $y = -2$; für $x = 1$, ist: $y = 2$; für $x = -1$, wird $y = -4$. Fahren wir so fort, für die an sich unbestimmte Grösse x allerlei, sowohl positive, als negative Werthe anzunehmen, und berechnen die jedesmal dazu gehö-

renden Werthe von y, so erhalten wir zweierlei zusammengehörende Reihen von Zahlen, z. B.:

für	wird
$x = 0$	$y = -2$
$= 1$	$= 2$
$= 2$	$= 8$
$= 3$	$= 16$
.	.
.	.
.	.
$= -1$	$= -4$
$= -2$	$= -4$
$= -3$	$= -2$
$= -4$	$= +2$
.	.
.	.
.	.

Diese beiden zusammengehörenden Zahlenreihen lassen sich nun auf mehr als eine Weise räumlich mit einander verbinden und versinnlichen, nämlich: statt durch Ziffern, auch durch proportionirte Linien darstellen, und deshalb als Mittel zur Erzeugung räumlicher Grössen benutzen.

Zieht man nämlich in einer Bild-Ebene eine grade Linie XX von unbestimmter Länge, und trägt darauf, von einem beliebig darin angenommenen festen Punct A aus, nach einer ganz beliebigen Linear-Einheit,*) die verschiedenen für x angenommenen Werthe ab, und zwar die positiven nach der einen, z. B. nach der rechten und dann die negativen nach der entgegengesetzten linken Seite, und ferner an die Endpuncte dieser verschiedenen Werthe von x, unter einem und demselben, z. B. rechten Winkel, die dazu gehörenden Werthe von y, und zwar die positiven nach der einen Seite, z. B. oberhalb, und dann die negativen unterhalb der Linie XX ab, so bestimmen die Enden dieser letzteren parallelen Linien eine gesetzmässige Reihe von Puncten M, M' N, N' ...

Es folgte nämlich aus der Gleichung:

$$y = x^2 + 3x - 2$$

für $x = \ldots. -5, -4, -3, -2, -1, \quad 0, 1, 2, \; 3 \ldots.$

$y = \ldots. +8, +2, -2, -4, -4, -2, 2, 8, 16 \ldots.$

Trägt man nun diese Zahlen, wie angegeben, durch grade Linien auf und nimmt deshalb:

x	y	x	y
$\overline{AP} = 1$;	$\overline{MP} = 2$;	$\overline{AQ} = -1$;	$\overline{NQ} = -4$,
$AP' = 2$;	$M'P' = 8$;	$AQ' = -2$;	$N'Q' = -4$,
$AP'' = 3$;	$M''P'' = 16$;	$AQ'' = -3$;	$N''Q'' = -2$,
$AP''' = 4$;	$M'''P''' = 26$;	$AQ''' = -4$;	$N'''Q''' = +2$,
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

*) Lässt man eine beliebig grosse Linie AP die Einheit (1) bedeuten, so stellt eine noch mal so lange Linie AP' die Zahl 2, eine dreimal so lange Linie AP'' die Zahl 3 dar etc.



so kommen die erwähnten Puncte MM'M''... NN'N''... zum Vorschein, und man begreift nun leicht, dass diese Puncte in einer durch die Gleichung:

$$y = x^2 + 3x - 2$$

vollkommen bestimmten krummen Linie liegen, und dass man auch alle übrigen Puncte derselben erhält, wenn man die unbestimmte Grösse x nicht sprungweise, wie hier geschehen, sondern stetig und sowohl nach der postiven als negativen Seite von dem Puncte A an wachsen, gleichsam fliessen lässt, d. h. auch alle zwischen $x = 0$ und $x = \pm 1$, dann zwischen $x = \pm 1$ und $x = \pm 2$ etc. fallende Werthe setzt, und die dazu gehörigen y berechnet oder berechnet denkt, worauf es hier in rein wissenschaftlicher Hinsicht nur ankommt, weil eine mathematische Linie doch nur gedacht und nicht versinnlicht werden kann.

Müsste aber für irgend einen practischen Zweck, etwa um darnach zu arbeiten, eine solche Linie nach einem vorgeschriebenen Maassstabe,*) der Gestalt und Grösse nach durch ein Bild anschaulich gemacht werden, so erhält man dies Bild dem Ideal desto ähnlicher, je mehr Puncte man berechnet, indem diese in der Regel durch freie Handzeichnung mit einander verbunden werden müssen.

Ehe wir weiter gehen können, müssen wir nun erst die Erklärung von ein paar zur Abkürzung des Vortrags gebräuchlichen Kunstwörtern, so wie einige Vorbegriffe vorausschicken.

I.

Begriff der veränderlichen Grössen.

Da in einer Gleichung zwischen zwei unbestimmten Grössen x, y, z. B. in der vorhergehenden:

$$y = x^2 + 3x - 2$$

diese Grössen in verschiedene Zustände kommen, sich ändern, so nennt man deshalb beide veränderliche Grössen, und

*) Krumme Linien, welche nach einerlei Gleichung, aber nach verschiedenen Maassstaben construirt werden, so wie die vorhergehende und nächstfolgende, kann man ähnliche nennen. Die Grösse des Maassstabes hat auf die Form und Eigenschaft einer krummen Linie keinen Einfluss.

zwar heisst die eine von ihnen (x), welche erst bestimmt sein, oder beliebig angenommen werden muss, bevor die andere einen Werth bekommen kann, die unabhängig (willkürlich) veränderliche Grösse, die andere (y) aber, welche dann durch die für erstere gemachte Annahme bestimmt ist, die abhängig veränderliche Grösse. In der Regel bezeichnet man die unabhängige Grösse mit x, die abhängige mit y.

II.

Functionen veränderlicher Grössen.

Der zuerst von Bernouilli in die mathematische Sprache eingeführte Ausdruck: Function*) veränderlicher Grössen, bedeutet überhaupt irgend einen Zusammenhang derselben oder Abhängigkeit von einander, also eine arithmetische Beziehung oder Gleichung zwischen denselben, durch welche die Grösse der einen durch die der anderen bestimmt wird und darnach berechnet werden kann.

So ist z. B. in dem vorhergehenden Ausdruck:

$$y = x^2 + 3x - 2$$

die Grösse y eine Function von x; aber auch umgekehrt ist x eine Function von y, denn wenn man in obiger Gleichung der veränderlichen Grösse y einen bestimmten Werth beilegt, so ist dadurch auch der dazu gehörige Werth (oder die Werthe) der andern Grösse x bestimmt und zu berechnen, indem man die Gleichung (Function) auf x reducirt.

Um kurz zu bezeichnen, dass eine Grösse von einer andern abhängt, schreibt man statt des Wortes Function nur den Anfangsbuchstaben F, f, φ oder ein anderes beliebiges Zeichen ψ, χ etc. So bedeutet z. B. $y = \varphi(x)$, (sprich: y gleich Function x), dass y eine Function von x ist; und $x = F(y)$, dass x von y abhängt. Ebenso bedeutet $\psi(x, y) = 0$ überhaupt eine zwischen x und y Statt findende gegenseitige Abhängigkeit.

Es giebt übrigens, wie wir später sehen werden, auch Functionen von drei, vier und mehreren veränderlichen Grössen.

III.

Eintheilung und Benennung der Functionen.

Die vollständige Unterscheidung der verschiedenartigen Functionen, auf welche mathematische Speculationen bisher geführt

*) Montucla histoire des mathématiques Tom. III, pag. 265.

haben, und die sich auf den verschiedenen Bau und die Eigenschaft derselben gründet (z. B. ganze, gebrochene, grade, ungrade) gehört in die Analysis. Hier brauchen wir nur folgende davon zu erwähnen:

1. **Transcendente Functionen**, so heissen alle die, in welchen **veränderliche** Exponenten, Logarithmen, Kreisbögen oder Winkel vorkommen, und die besonders noch, die ersten Exponential-, die andern logarithmische und die letztern Kreis-Functionen genannt werden. Transcendente Functionen sind z. B. (wenn x, y veränderliche, a, b, c... aber unveränderliche [beständige] Grössen bedeuten) die folgenden:

$$y = a^x$$
$$y = a \, . \log x$$
$$y = a \, . \sin x$$

2. **Algebraische Functionen**, so heissen **alle** übrigen, in welchen also kein Exponent, kein Logarithmus und kein Bogen oder Winkel, als **veränderliche** Grösse vorkommt. Solche sind z. B.:

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$
$$y = ax^m + \frac{b}{\sqrt{x}}$$
$$y^5 - 3x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}} + a = 0.$$

3. Die algebraischen Functionen heissen: irrational oder rational, je nachdem die veränderlichen Grössen mit einem Wurzelzeichen (gebrochenen Exponenten) behaftet sind, oder nicht.

Wie man eine irrationale Function, z. B. die drei vorhergehenden rational macht, ist in der Algebra gezeigt. (§ 230.)

4. Die algebraischen rationalen (oder rational gemachten) Functionen werden ferner nach Graden unterschieden, welchen der grösste Exponent bestimmt, womit eine veränderliche Grösse behaftet ist. Kommt ein Product aus veränderlichen Grössen darin vor, so wird bei Bestimmung des Grades die Summe ihrer Exponenten für einen gerechnet*). So ist z. B. unter den folgenden Functionen No. 1 vom ersten; 2, 3 vom zweiten; 4, 5 vom dritten Grade:

---

*) Als Grund dieser Erklärung möge der Anfänger Folgendes nehmen: Da y eine Function von x, so sei für ein bestimmtes x, der zugehörige Werth von $y, = mx$, alsdann könnte man z. B. die fünfte Gleichung so schreiben: $x^2 . mx + 3y^2 - a = 0$, oder: $mx^3 + 3y^2 - a = 0$, mithin eine Gleichung vom dritten Grade.

$$y = ax + b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$y = x^2 + 3x - 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$y^2 = 2ax - x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$y^2 = x + y^2x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$
$$x^2y + 3y^2 - a = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

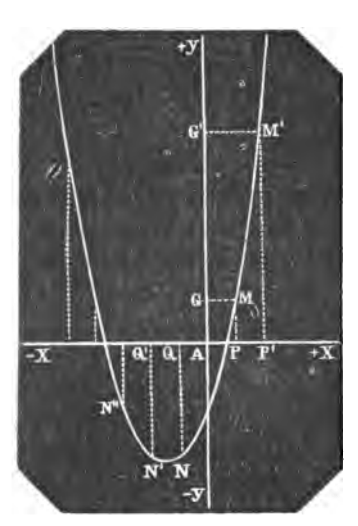
IV.

Coordinaten-Systeme.

Wir haben vorhin erwähnt, dass man jedes Paar zusammen gehörender stetig auf einander folgender Werthe, welche aus einer Function zweier veränderlichen Grössen fliessen, auf mehr als eine Weise räumlich verbunden darstellen und daraus krumme Linien erzeugen könne. Da aber die bisherige Praxis sich immer noch mit zwei dieser Verfahrungsweisen, nämlich Constructionen nach sogen. Parallel- und Polar-Coordinatensystemen beholfen hat, so dürfen wir auch nur diese beiden hier erklären.

1. Parallel-Coordinaten. Construirt man eine Function zweier veränderlichen Grössen, z. B.:

$$y = x^2 + 3x - 2$$



auf die vorhin angegebene Weise, so nennt man die auf der Linie XX von A aus abgeschnittenen, den verschiedenen positiv und negativ genommenen Werthen (Zahlen) der willkürlich veränderlichen Grösse x entsprechenden Stücke AP, AP'; AQ... die Abscissen, und die dazu gehörigen, den verschiedenen y proportionirten parallelen Linien MP, M'P'; QN... die Ordinaten, und je zwei solcher verbundenen Linien AP, MP; AP', M'P', die Coordinaten der entsprechenden Puncte. So ist z. B. AP = 1 die Abscisse und MP = 2 die Ordinate des Punctes M.

Der beständige Winkel (MPX = M'P'X = ..), unter welchem die Coordinaten mit einander verbunden sind, und der, wenn nicht ganz besondere Umstände ihn bestimmen, ein ganz beliebiger sein kann, heisst der Coordinaten-Winkel. Ist dieser ein rechter, so heissen die Coordinaten rechtwinklige, ist er ein spitzer oder stumpfer, so heissen sie schiefwinklige.

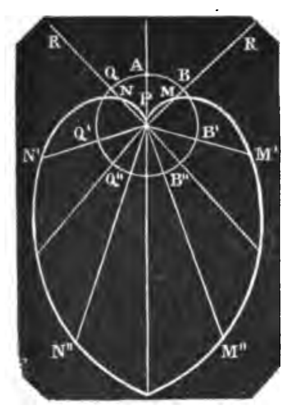
Der feste Punct A heisst der **Anfangspunct** der Coordinaten.

Die durch den Anfangspunct gehende Linie XX, auf welcher in der Regel nach der rechten Seite die für x gesetzten positiven, und nach der linken Seite die für x gesetzten negativen Zahlen, durch die ihnen proportionirten und entsprechenden positiven oder negativen Abscissen abgetragen werden, heisst die **Abscissen-Linie** oder **Abscissen-Achse**.

Die zu den verschiedenen Werthen von x gehörenden positiven Werthe von y trägt man in der Regel **über**, und dann die negativen Werthe von y **unter** der Abscissenlinie, durch proportionirte und ihnen entsprechende positive oder negative Ordinaten auf.

Denkt man sich noch eine grade Linie YY durch den Anfangspunct, parallel mit der Ordinaten-Richtung gezogen, so nennt man diese Linie die **Ordinaten-Achse**. Man kann nämlich auch, statt die Ordinaten MP, M′P′ ... unmittelbar an ihre Abscissen AP, AP′ ... anzutragen, dieselben erst auf die Ordinaten-Achse abstecken, AG, AG′..., dann durch G die Linie GM parallel mit der Abscissen-Achse und durch P die PM, parallel mit der Ordinaten-Achse, ziehen, deren Durchschnitt dann auch die Lage des Punctes M bestimmt. Es ist nämlich einleuchtend, dass die Lage eines Punctes gegen zwei Achsen durch die **Grösse** und **Vorzeichen** seiner Coordinaten vollkommen bestimmt ist, und dass der Winkel YAX, den die positiven Seiten der Achsen mit einander machen, den Coordinaten-Winkel bestimmt.

* 2. **Polar-Coordinaten.** Statt die paarweise zusammengehörigen Werthe zweier abhängig veränderlichen Grössen durch gradlinigte (parallel) Coordinaten darzustellen, kann man dieselben auch durch sogen. Polar-Coordinaten räumlich mit ein ander verbinden, indem man die verschiedenen Werthe, welche die unabhängig veränderliche Grösse durchlaufen kann, statt auf einer graden Linie, auf einem beliebigen (jedoch in der Regel mit der Linear-Einheit beschriebenen) Kreise, von einem beliebig darin genommenen Anfangspunct A aus, und zwar die positiv gesetzten Werthe, als Abscissen, nach der einen (rechten), und die negativen nach entgegengesetzter (linker) Seite herum, durch proportionale Bögen abträgt, und dann die dazu gehörenden Werthe der abhängigen Grösse auf der, vom Mittelpunct P des Kreises, hier Pol genannt, nach dem Endpunct des abgesteckten Bogens leitenden Linie, dem sogenannten **Radius vector** (Leitstrahl), abmisst.



Sei z. B. (indem wir wie üblich die abhängig veränderliche Grösse mit r (radius vector) und die unabhängig veränderliche Grösse mit einem Bogenzeichen w andeuten) die Polar-Gleichung:

$$r = \tfrac{1}{2} w^2$$

nach angegebenem System zu construiren.

Beschreiben wir zuerst mit einer beliebig angenommenen Linear-Einheit $PA = 1$ einen Kreis, (dessen Umfang also $= 2\pi$ solcher Einheiten $= 6.28..$)

für: $w = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm 2\pi, \pm(2\pi + 1)\ldots$

ist: $r = 0, \quad \tfrac{1}{2}, \quad 2, \quad 4\tfrac{1}{2}, \ldots \quad 2\pi^2, \dfrac{(2\pi+1)^2}{2} \ldots$

Nehmen wir nun A als Anfangspunct des Abscissen-Kreises und darauf $w = +1 = AB$, und tragen die hiezu gehörige Länge des Radius vectors $r = \tfrac{1}{2} = PM$, auf dem vom Pol P durch B gehenden Leitstrahl PR ab, so ist durch diese beiden Polar-Coordinaten AB und PM die Lage des Punctes M bestimmt. Ebenso erhält man den Punct M′, wenn man die zu $w = +2 = AB'$ gehörende Länge $r = 2 = PM'$, auf dem vom Pol durch B′ leitenden Strahl abträgt. So kann man nun fortfahren, erstlich bis $w = 2\pi$, und dann den Abscissenkreis, als wenn er unendlich wäre, immer von neuem wieder durchlaufen, indem man die schon gemachten Umläufe mitrechnet, also auch:

$$w = \pm(2\pi + 1), \pm(2\pi + 2), \pm(2\pi + 3) \ldots \pm(n\pi + 1) \ldots$$

setzt, und die dazu gehörenden, gleichfalls wachsenden Leitstrahlen berechnet.

Für $w = -1 = AQ$ ist $r = \tfrac{1}{2} = PN$, etc.

Man sieht nun leicht, dass wenn man die Kreisabscissen nach beiden Seiten herum nicht sprungweise, sondern stetig wachsen lässt, dann auch der Radius vector stetig wächst und ein durch die Polargleichung:

$$r = \tfrac{1}{2} w^2$$

vollkommen bestimmter Zug entsteht, der, weil für $w = 0$ auch $r = 0$; und weil $(-w)^2 = (+w)^2$, aus zwei vollkommen gleichen Zweigen besteht, die beide vom Pol ausgehen und sich in unzähligen Windungen um denselben herumziehen. Wir haben hier von jedem der beiden entgegengesetzten Zweige nur eine

halbe Windung gezeichnet, was zur Erklärung und vorläufigen Andeutung des Stoffes, wovon später gehandelt werden soll, genügt.

3. Man kann sich, wenn man will, sowohl die nach diesem als nach dem vorher erklärten Coordinaten-System erzeugten Züge auch durch stetige Bewegung eines Punctes beschrieben denken und zwar, nach dem Polar-System, indem man sich vorstellt: ein Leitstrahl PR von unbestimmter Länge drehe sich wiederholt um den Pol (Drehpunct), während zugleich ein Punct M mit einer, durch die Gleichung vorgeschriebenen Geschwindigkeit auf ihm fortgleitet, und somit genöthigt ist, einen gesetzmässigen Zug zu beschreiben. Nach dem Parallel-System, indem man sich vorstellt: eine grade Linie, die Ordinate PM, gleite parallel mit der Ordinaten-Achse an der Abscissen-Linie hin, während zugleich ein Punct M sich in der Ordinaten-Richtung, nach dem von der Gleichung vorgeschriebenen Gesetze bewegt, alsdann bildet die Spur, welche der Punct M zurücklässt, einen gesetzmässigen Zug. Wir müssen indessen bemerken, dass diese aus der Mechanik entlehnten Begriffe Bewegung und Geschwindigkeit, streng genommen, nicht in die reine Geometrie gehören und nur darin tolerirt werden. Und obgleich diese Vorstellungen auf die Erfindung sinnreicher Werkzeuge, so wie auch auf Instrumente führen können, mittelst welcher man, wie wir später sehen werden, manche aus Gleichungen entspringende Gestalten eben so leicht wie den Kreis mit einem Zirkel beschreiben kann, so wollen wir doch zugleich bemerken, dass zu diesem Zweck wenn es auf möglichste Genauigkeit ankommt, das Construiren durch Berechnen und Auftragen der Coordinaten, wenn auch practisch langsamer und mühsamer, doch genauer und sicherer ist.

V.

Mannigfaltigkeit krummer Linien.

Um nur vorläufig eine Vorstellung von der unendlichen Mannigfaltigkeit krummer Linien zu geben, und durch Beispiele zu zeigen, dass schon die Züge, welche aus algebraischen Gleichungen von nur verschiedenem Grade hervorgehen, verschieden sind, wollen wir einige bestimmte Functionen zweier veränderlichen Grössen aufstellen, jedoch den Lauf der daraus entspringenden, auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Züge, nur durch so viele Puncte verfolgen, als nothwendig ist, die Verschiedenheit derselben bemerklich zu machen. Wir werden zugleich sehen,

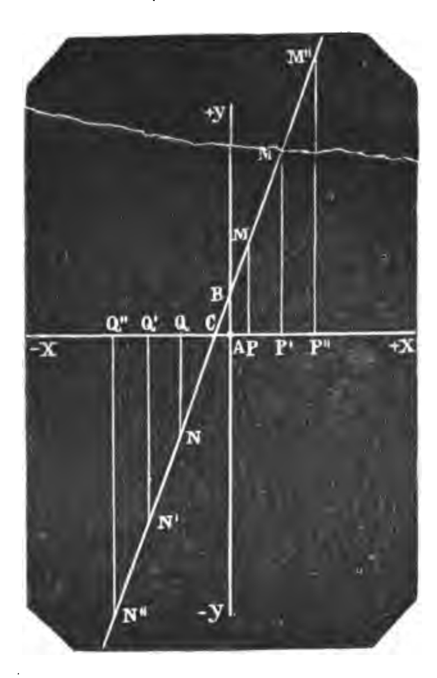
dass nach Beschaffenheit der Function dieselbe entweder eine stetig in's Unendliche fortlaufende, oder eine begrenzte krumme Linie giebt, eine continuirliche, oder discontinuirliche, d. h. die aus zusammenhängenden oder getrennten Zweigen besteht; dass aus einer Gleichung nur Puncte oder auch nichts hervorgehen, und endlich, dass dieselbe aus mehreren anderen Gleichungen zusammengesetzt sein und die einzelnen Züge derselben zugleich enthalten kann

A.

Wir nehmen zuerst eine beliebige Function ersten Grades, z. B.:

$$y = 2x + 1$$

Sei XX die Abscissen-Achse und A der Anfangspunct rechtwinkliger Coordinaten.



Setzen wir nun in obiger Gleichung:

$$x = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

so wird $y = 1, 3, 5, 7 \ldots$

Setzen wir:

$$x = -\tfrac{1}{2}, -1, -2, -3, .$$

so wird $y = 0, -1, -3, -5, .$

Es ist nämlich für $x = 0$, $y = 1 = AB$, also B der Punct, in welchem der aus der obigen Gleichung entspringende Zug die Ordinaten-Achse schneidet. Um nun auch zu finden, ob und in welchem Abstande vom Anfangspunct er die Abscissenachse schneidet, (welche beiden Durchschnittspuncte der Achsen man bei der Construction eines Zuges gewöhnlich zuerst zu bestimmen pflegt,) bedenke man, dass in diesem Durchschnittspunct die Ordinate $y = 0$ ist und also ein solcher Werth für x gesucht werden muss, für welchen y, oder der ihm gleichgeltende Ausdruck $2x + 1$, Null wird. Wir setzen deshalb:

$$2x + 1 = 0$$

woraus: $x = -\frac{1}{2}$

für diesen Werth von $x = -\frac{1}{2} = AC$ wird die Ordinate $y = 0$,

und C ist folglich der Durchschnittspunct unseres Zuges mit der Abscissen-Linie. Für immer grösser werdende positive und negative Abscissen erhält man immer grössere positive und negative Ordinaten. Der Zug (dessen nähere Beschaffenheit wir hier noch nicht untersuchen wollen) geht also stetig, sowohl oberhalb als unterhalb der Abscissen-Linie in's Unendliche fort.

B.

Gleichungen zweiten Grades.

1. Es sei zuerst die Gleichung:

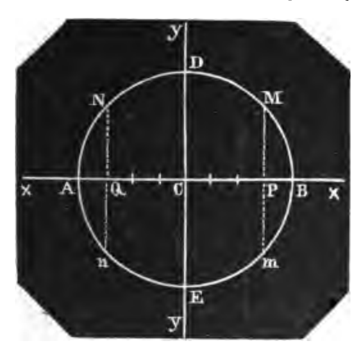
$$y^2 + x^2 - 16 = 0$$

durch rechtwinklige Coordinaten zu construiren.

Sei XX die Abscissen-Linie und C der Anfangspunct.

Reduciren wir obige Gleichung auf die abhängig veränderliche Grösse y, so kommt:

$$y = \sqrt{(16 - x^2)}$$



Um zuerst zu bestimmen, ob und wo der Zug die Ordinaten-Achse schneidet, setzen wir $x = 0$, alsdann ist: $y = \sqrt{16} = \pm 4$ (weil jede grade Wurzel sowohl positiv als negativ sein kann). Nehmen wir also $CD = +4$ und $CE = -4$, so sind D und E die beiden gesuchten Puncte, in welche die Ordinaten-Achse geschnitten wird.

Um nun auch die Durchschnittspuncte in der Abscissen-Linie zu finden, wo $y = 0$ ist, setzen wir:

$$\sqrt{(16 - x^2)} = 0$$

hieraus: $x = \pm 4$

für $x = +4$ und auch für $x = -4$ wird $y = 0$. Nehmen wir also $x = CB = +4$ und $x = CA = -4$, so sind A und B die Durchschnittspuncte in der Abscissen-Linie.

Für alle Werthe von x, die grösser als ± 4 sind, giebt es keine Ordinaten (weil für $x > \pm 4$, y imaginair wird).

Für alle gleich grossen entgegengesetzten Abscissen, von 0 bis ± 4, erhält man zwei gleiche entgegengesetzte Ordinaten, die mit wachsenden $\pm x$ immer kleiner werden, nämlich:

für $x = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \pm 4$

ist $y = \pm 4, \pm\sqrt{15}, \pm\sqrt{12}, \pm\sqrt{7}, \ 0$

Man sieht also, dass diese **krumme Linie zweiten Grades** eine geschlossene (begrenzte) ist.

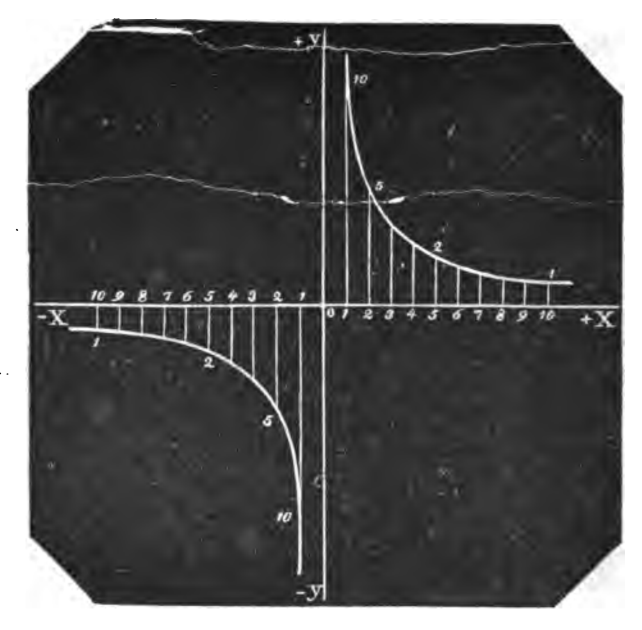
2. Sei noch die Gleichung zweiten Grades:

$$yx = 10$$

zu construiren.

Reduciren wir sie auf y, so ist:

$$y = \frac{10}{x}$$



für $x = 0,\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{10},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots 10, \ldots 100, \ldots 1000 \ldots$
ist $y = \infty,\ 1000, 100,\ 10,\ 5, 3\frac{1}{3}, 2\frac{1}{2}, 2, \ldots\ 1, \ldots \frac{1}{10}, \ldots \frac{1}{1000} \ldots$

Für immer wachsende positive und negative Abscissen werden die dazu gehörigen positiven und negativen Ordinaten immer kleiner und kleiner; für abnehmende Abscissen hingegen immer grösser. Sowohl der unterhalb als der oberhalb der Abscissen-Linie liegende gleiche Zweig der krummen Linie nähert sich also den Coordinaten-Achsen immer mehr und mehr, ohne sie jedoch zu erreichen, jedenfalls können sie dieselben nicht schneiden; beide Zweige liegen nämlich in zwei gegenüber liegenden Winkeln, und können deshalb offenbar nicht stetig (continuirlich) mit einander zusammenhängen. Sie schauen sich einander an; die eine Linie ist gleichsam das Spiegelbild der

andern. Weil sie aber beide aus einer einzigen Gleichung entspringen, die sich nicht in zwei andere zerlegen lässt, wovon jede einen Zweig für sich gäbe, so betrachtet man deshalb beide Zweige, weil doch durch das Band ihrer gemeinschaftlichen Gleichung ein gewisser Zusammenhang unter ihnen Statt findet, als zu Einer Linie gehörend, die man deshalb eine discontinuirliche (unzusammenhängende) nennt. Ebenso heisst auch bei rein analytischen Betrachtungen die Function $yx = 10$, so wie jede andere, aus welcher ein discontinuirlicher Zug hervorgehen würde, eine discontinuirliche Function.

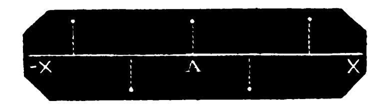
Da die beiden vorhergehenden Linien, so wie auch die in IV, 1 nach der Gleichung $y = x^2 + 3x - 2$ construirte alle vom zweiten Grade sind, so bemerkt man schon hier, dass selbst krumme Linien von einerlei Grad an Gestalt sehr verschieden sein können.

C.

* Die transcendente Gleichung:

$$y = (\sqrt{-1})^x$$

giebt construirt nur Puncte.



Es ist z. B. für:

$$x = 0,\ y = (\sqrt{-1})^0 = 1 \text{ (s. Algebra § 205.)}$$
$$x = \pm 1,\ y = (\sqrt{-1})^1 \text{ (imaginair)}$$
$$x = \pm 2,\ y = (\sqrt{-1})^2 = -1$$
$$x = \pm 4n,\ y = (\sqrt{-1})^{4n} = 1 \text{ (s. Algebra § 325.)}$$
$$x = 4n + 2,\ y = (\sqrt{-1})^{4n+2} = -1$$
$$x = \pm \tfrac{2}{5},\ y = \sqrt[5]{-1} = -1$$
$$x = \pm \tfrac{4}{5},\ y = \sqrt[5]{1} = 1.$$

Und diese Puncte liegen offenbar alle in zwei mit der Abscissen-Achse parallelen Linien, und zwar (weil man für x alle möglichen Zahlen $\frac{2n}{2n+1}$, $\frac{2n}{4n+1}$, $\frac{4n}{4n+1}$ etc., gesetzt denken muss) rücken sie immer näher und näher an einander, ohne deshalb stetige Linien zu bilden.

D.

Die Gleichung:

$$y = 3 + \sqrt{(-4x^2)}$$

giebt für jeden reellen Werth von $x > 0$, ein imaginaires y, also keine Linie, sondern nur einen Punct in der Ordinaten-Achse. Es ist nämlich für $x = 0$, $y = 3$.

E.

Die Gleichung vierten Grades:

$$y^4 + (2x^2 - 5)y^2 + x^2(x^2 - 5) + 4 = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

giebt (Algebra § 231):

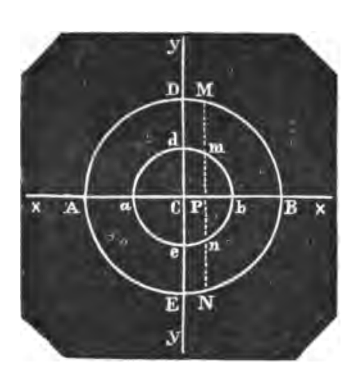
$$y^4 + (2x^2 - 5)y^2 = -x^2(x^2 - 5) - 4$$

$$y^4 + (2x^2 - 5)y^2 + \left(\frac{2x^2 - 5}{2}\right)^2 = \frac{(2x^2 - 5)^2}{4} - x^4 + 5x^2 - 4$$

$$y^2 + \frac{2x^2 - 5}{2} = \frac{\pm\sqrt{9}}{2}$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{5 \pm 3 - 2x^2}{2}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Werden beide Vorzeichen $\pm$ berücksichtigt, so giebt die Construction zwei krumme Linien.



Denn für jeden Werth von x erhält man vier Werthe für y, wovon jedoch, sobald $x > +1$ genommen wird, zwei imaginair werden.

Setzen wir z. B. $x = \frac{1}{2} = CP$, so ist, für das obere Zeichen von ± 3, $y = \sqrt{\frac{15}{4}} = \pm 1{,}9 \ldots\ldots$, welche Werthe die Ordinaten PM, PN darstellen. Nehmen wir von ± 3 das untere Zeichen, so ist für dasselbe $x = \frac{1}{2} = CP$, $y = \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm 0{,}86 \ldots$ (Pm, Pn) etc.

Es erhellt nun leicht, dass aus obiger Gleichung (2) die eine der beiden Linien ADBE entspringt, indem wir für alle $\pm x$ stets das obere Zeichen von ± 3 nehmen, mithin die Gleichung:

$$y = \sqrt{(4 - x^2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

construiren, und dass die andere Linie $adbe$ erscheint, indem

wir für dieselben $\pm x$ stets das untere Zeichen von ± 3 nehmen, oder die Gleichung:

$$y = \sqrt{(1 - x^2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

construiren.

2. Ein jedes Gebilde, welches aus mehreren Linien besteht, von welchen aber jede aus einer besondern Gleichung erhalten werden kann, nennt man zur Unterscheidung von den discontinuirlichen Linien zusammengesetzte Linien. Ebenso heisst auch die Gleichung, welche sie alle zugleich enthält, eine zusammengesetzte Gleichung, und eine solche ist dann immer ein Product aus den auf 0 reducirten Gleichungen der einzelnen Züge.

So ist z. B. die Gleichung (1) nämlich:

$$y^4 + (2x^2 - 5)\, y^2 + x^2\, (x^2 - 5) + 4 = 0 \ldots\ldots (1)$$

aus der Multiplication der beiden auf Null reducirten Gleichungen (3) und (4) entstanden, weshalb sie auch wieder in diese Factoren zerlegt werden kann.

Obige Gleichung lässt sich nämlich, in Factoren zerlegt, auch so schreiben:

$$(y^2 + x^2 - 4)\,(y^2 + x^2 - 1) = 0 \ldots\ldots (5)$$

Um nun deutlich einzusehen, dass die Gleichung (1) dieselben Züge enthält, welche die beiden Gleichungen (3) und (4) geben, bemerke man Folgendes:

Die Gleichung (1) oder, was desselbe ist, die Gleichung (5) fordert, zu beliebig angenommenen Werthen von x, solche Werthe von y zu bestimmen, welche derselben Genüge leisten. Dies kann nun, wie die Gleichung (5) zeigt, auf zweifache Weise geschehen; einmal, indem man zu beliebigen Werthen von x die zugehörigen y so nimmt, dass immer der Factor $y^2 + x^2 - 4$ gleich Null wird, nämlich:

$$y^2 + x^2 - 4 = 0$$

$$\text{also: } y^2 = 4 - x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

und ein andermal auch, indem man zu denselben Werthen von x, y so nimmt, dass der andere Factor:

$$y^2 + x^2 - 1 = 0$$

$$\text{also: } y^2 = 1 - x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Die Gleichung (6) giebt construirt die Linie ADBE und die Gleichung (7) die andere Linie *adbe*.

3. Hiedurch unterscheiden sich nun deutlich die zusammengesetzten Gleichungen von den discontinuirlichen. Eine discontinuirliche Gleichung giebt construirt unzusammenhängende Züge, lässt sich aber nicht in solche Factoren zerlegen, von welchen jeder einzelne einen dieser Züge besonders gäbe.

4. Hiernach ist nun auch klar, dass wenn man mehrere verschiedene auf Null reducirte Functionen zweier veränderlichen Grössen, x, y, in Zeichen:

$$\varphi(x,y)=0$$
$$\psi(x,y)=0$$
$$\chi(x,y)=0$$
$$\vdots \quad \vdots$$

von welchen jede eine besondere Linie enthält, über einerlei Coordinaten-Achsen construirt, dann das Product aus diesen Gleichungen, nämlich:

$$\varphi(x,y)\,.\,\psi(x,y)\ldots=0$$

auf dieselben Coordinaten-Achsen bezogen, alle jene Linien, in derselben Ordnung, auf einmal giebt.

F.

Nun aber wird der Anfänger, der nur einige analytische Vorkenntnisse hat, begreifen, dass schon alle algebraischen, nur dem Grade nach verschiedene Functionen zweier veränderlichen Grössen, z. B.:

$$y=ax+b$$
$$y=ax^2+bx+c$$
$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

durch Parallel-Coordinaten construirt, verschiedene krumme Linien geben müssen (ohne noch die verschiedenen Linien zu erwähnen, welche, wie wir in B 1, 2, gesehen, schon aus Gleichungen einerlei Grades, so wie aus transcendenten und Polar-Gleichungen entspringen). Und da man nun durch blosse Steigerung des Exponenten der veränderlichen Grössen den Grad der algebraischen Functionen in's Unendliche steigern kann, so ist klar, dass die erste Aufgabe unserer neuen Geometrie eine unerschöpfliche, von den zufälligen Gaben der Phantasie unabhängige Quelle von Bildungsgesetzen für neue räumliche Gestalten zu erfinden, durch die allgemeine Zauberformel:

$$y=\varphi(x)$$

vollkommen gelöst ist, und dass uns dieselbe, insofern es auf die nähere Betrachtung dieser Gestalten ankommt, mehr Stoff giebt, als man je wird bearbeiten können.

VI.

Dasein und Entdeckung der zu einer nach irgend einem mechanischen Gesetz entstandenen Linie gehörenden Gleichung.

Wenn eine Linie nicht nach einem analytisch ausgedrückten Gesetz, d. h. nicht aus einer Gleichung zweier veränderlichen Grössen durch Construction der Parallel- oder Polar-Coordinaten, sondern nach irgend einem mechanischen Gesetz entstanden ist, wie z. B. eine der drei, Seite 7 erwähnten Linien (Ellipse, Cycloide, Spirale), sollte es dann wohl allemal für eine solcherweise gebildete Linie eine Gleichung geben? mit andern Worten: kann man sich eine irgendwie gesetzmässig gebildete Linie immer als in einer Function veränderlicher Grössen enthalten und daraus durch Construction derselben hervorgegangen denken? — Und wenn eine solche Function wirklich existirt, kann man sie auch immer finden, — lässt sich das mechanische Gesetz, nach welchem eine Linie entstanden, oder auch ein gegebenes, sie bestimmendes Merkmal, in analytische Sprache übersetzen und durch eine Gleichung ausdrücken?

Die erste Frage, nach der Existenz einer solchen Gleichung, muss aus folgenden Gründen bejaht werden:

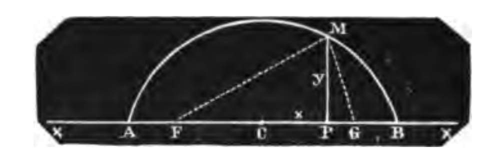
1. Die Analysis lehrt, dass schon nur dem Grade nach verschiedene algebraische Functionen zweier veränderlichen Grössen verschiedene Linien geben müssen. Nun giebt es aber solcher Functionen unendlich viele; denken wir uns ausserdem noch die ebenfalls zahllose Menge Linien, welche aus transcendenten Functionen, so wie die, welche aus algebraischen Functionen einerlei Grades entspringen (und deren Zahl mit dem Grade wächst*), so könnte man schon hieraus schliessen, dass unter dieser unendlichen Menge Linien gewiss auch die fragliche — welche sie auch sein möge: Ellipse, Cycloide, Spirale, Kreis, grade Linie etc. — enthalten sein, mithin auch eine Gleichung für

*) Gleichungen 1. Grades geben nur eine Art Linie, Gleichungen 2. Grades vier verschiedene Arten, aber nach Newton's, Euler's und Plücker's Untersuchungen kann man aus Gleichungen 3. Grades schon an siebzig verschiedene Linien erzeugen. Wie mag wohl die Zahl der Linien mit dem Grade wachsen?

dieselbe existiren müsse. Verständlicher möchte aber folgender Grund sein:

Durch das Gesetz, nach welchem irgend eine Linie (Ellipse, Cycloide, Kreis etc.) gebildet worden, sind im Voraus die Lagen ihrer Puncte vollkommen bestimmt, und zwar gegen eine feste grade Linie und einen festen Punct in ihr, die beide entweder durch den Zug selber bestimmt, oder bei Bildung desselben zu Grunde gelegt, oder auch willkürlich angenommen worden und auf welche die Lage aller Puncte, sowohl durch Parallel- als auch durch Polar-Coordinaten bezogen werden kann.

Entsteht z. B. eine krumme Linie auf die vorhin erwähnte Weise: dass ein mit seinen beiden Enden in zwei Puncten F und G befestigter Faden FMG mittelst eines Stiftes angespannt und so um die beiden festen Puncte F, G ganz herumgeführt wird,



so ist uns hier die durch die beiden festen Puncte F, G bestimmte Richtung XX, die wir als Abscissen-Linie nehmen können, durch die krumme Linie AMB selbst gegeben, so wie auch ein fester Punct in XX, z. B. F oder G oder auch die Mitte C derselben, die wir als Anfangspunct der Coordinaten nehmen können. — Ausserdem sind hier mit dem Bildungsgesetz der krummen Linie zugleich zwei, das Maass derselben bestimmende Grössen gegeben, nämlich: die Länge des ganzen Fadens FM+MG und der Abstand der beiden festen Puncte F, G, welche beiden Grössen sich nicht ändern, und deshalb auch beständige Grössen genannt werden.

So wie wir nun vorhin unbenannte Zahlen durch proportionirte Linien darstellten, so können wir jetzt auch umgekehrt die hier gegebenen Grössen und eine beliebig genommene (positive und negative) Abscisse mit einer ganz beliebigen Linear-Einheit ausmessen und ihre Grösse durch unbenannte Zahlen ausdrücken. Bezeichnen wir der Kürze wegen die nach dieser willkürlich gewählten Linear-Einheit ausgedrückte beständige Länge des ganzen Fadens FM+MG mit l, den Abstand der Puncte F, G von der Mitte C mit e und messen nach derselben Linear-Einheit eine beliebig grosse Abscisse CP$=x$ ab, so ist klar, dass die Zahl-Einheiten, der zu diesem x gehörigen, nach

demselben Maasse ausgedrückten senkrechten Ordinate MP $= y$, nicht mehr beliebig, sondern durch das Bildungsgesetz der krummen Linie, durch das Maass derselben (l, e) und CP $= x$ vollkommen bestimmt ist. Mit andern Worten: es muss durchaus zwischen den Zahlen y und l, e, x eine arithmetische Beziehung, ein analytisches Gesetz:

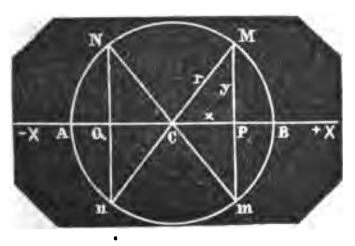
$$y = \varphi\,(l,\ e,\ x)$$

Statt finden, vermöge welches man erstere (y) aus letztern $(l,\ \grave{e},\ x)$ berechnen kann.

Eine solche Gleichung existirt in jedem Falle für jede gesetzmässig gebildete räumliche Grösse. Ob sie aber auch immer gefunden werden kann, das ist eine andere Frage. Immerhin würde aber das Nichtkönnen nur Mangel an Scharfsinn und Unkunde der Analysis beweisen.

Um das Gesagte durch ein Beispiel noch mehr zu erläutern, wollen wir einmal die Gleichung für eine bestimmte auf mechanische Weise entstandene krumme Linie aufsuchen, jedoch noch nicht für die vorhergehende, sondern weil die Sache dem ersten Anfänger noch zu fremdartig ist, des leichtern Verständnisses halber erst für eine uns aus der Euklidischen Geometrie bereits bekannte krumme Linie, nämlich für den Kreis.

Auf mechanische Weise wird bekanntlich ein Kreis gebildet, indem man eine grade Linie von beständiger Länge AC (den Radius) um den einen Endpunct C sich drehen und den andern Endpunct A die Kreislinie beschreiben lässt.



Aus dieser Entstehungsweise der Kreislinie folgt sogleich das sie bestimmende Merkmal, dass alle ihre Puncte M, m, n, N..... gleich weit vom Mittelpunct entfernt sind. Und aus diesem Merkmal können wir nun leicht ihre Gleichung finden.

Nehmen wir einen beliebigen Durchmesser AB als Abscissen-Richtung und C als Anfangspunct, so können wir hierauf die Lage eines jeden beliebigen Punctes M durch rechtwinklige Coordinaten beziehen.

Betrachten wir nämlich die Abscissen, die wir von C aus nach zwei entgegengesetzten Richtungen nehmen können, nach der rechten Seite CP als positiv (direct), nach der linken Seite CQ als negativ (invers), ferner die oberen Ordinaten MP, NQ

als positive, die unteren mP, nQ als negative, so findet (weil sowohl von negativen als positiven Grössen alle graden Potenzen positiv sind) vermöge des Pythagoräischen Lehrsatzes zwischen den Coordinaten eines beliebigen Punctes M und dem vom Mittelpunct dahin gezogenen Radius CM immer folgende Gleichung Statt:

$$MP^2 + CP^2 = MC^2$$

also auch, wenn man diese Linien mit einerlei Einheit ausgemessen, in Zahlen aufgelöst denkt, $MP = y$, $CP = x$, und den beständigen Radius $CM = r$ setzt:

$$y^2 + x^2 = r^2$$

und dies ist nun die geforderte Gleichung des Kreises, nach welcher man die eine veränderliche Grösse aus der andern berechnen kann, und durch deren Construction der Kreis wieder erscheinen muss. Diese unwandelbare Gleichung gilt offenbar für alle Puncte des Kreises, ihre rechtwinkligen Coordinaten mögen positiv oder negativ sein.

Es ist nämlich klar, dass wenn man die in der Gleichung:

$$y^2 + x^2 = r^2$$
$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

worin r eine beliebige, aber beständige Zahl bedeutet, z. B. $r = 3$, enthaltene krumme Linie, auf rechtwinklige Coordinaten bezogen, ganz construirt, indem man die unabhängig veränderliche Grösse x alle möglichen Werthe von 0 bis $+r$ und von 0 bis $-r$ durchlaufen lässt, und die zu diesen unzähligen Zuständen von x gehörigen Werthe von y berechnet, oder, worauf es hier nur ankommt, berechnet und aufgetragen denkt, dann alle Puncte eines Kreises, dessen Radius $= r$, richtig zum Vorschein kommen; kurzum, dass in obiger Gleichung: $y^2 + x^2 = r^2$ das Bild eines Kreises wirklich enthalten, und folglich diese Gestalt in einem analytischen Begriff gefasst ist, durch welchen wir uns aus dem Gebiete der Anschauung aus einer Sinnenwelt in eine rein geistige Begriffswelt gehoben sehen, und dass ein der analytischen Sprache Kundiger das in den paar Worten:

$$y^2 + x^2 = r^2$$

begriffene Bild, ohne es je gesehen zu haben, sogleich erkennt und es darnach darstellen und versinnlichen kann.

Und so wie hier den Kreis, kann man — wie wir später lernen werden — auch andere gesetzmässig gebildete Linien —

ja selbst, wenn man die Mühe nicht scheuen wollte, jede Gestalt, deren Bildungsgesetz man gar nicht kennt, z. B. ein Profil, so scharf in abstracten analytischen Begriffen auffassen und wieder darnach versinnlichen, dass das Auge keine Unähnlichkeit bemerken kann. Für solche practische Zwecke würde freilich die Arbeit nicht belohnt werden. Dazu soll aber auch die Analysis nicht dienen. — Uns genügt in dieser Hinsicht das Bewusstsein, dass wir es könnten, wenn wir wollten. Dieses Bewusstsein führt indessen zu merkwürdigen Folgerungen und Betrachtungen über das Wesen und die Macht der Analysis.

Durch die Sprache der Analysis kann eine Gestalt für die Ewigkeit unwandelbar erhalten werden, was durch keine andere Sprache, durch keine Kunst möglich ist. — Hätte auch der geschickteste Zeichner das Profil des Urvaters entworfen, so würde die Zeichnung, weil alles Material vergänglich ist, doch irgend einmal nach tausend oder Millionen von Jahren vergehen, und um die Gestalt für die Nachwelt treu zu erhalten, müssten doch dann und wann Copien von Copien genommen werden. Wie würde es aber endlich um die Aehnlichkeit stehen? Es gäbe kein Urbild mehr zur Vergleichung. Hätte man dagegen die Gestalt in analytische Begriffe gebracht, so würde man darnach, weil Begriffe unverweslich sind, zu jeder Zeit Adam wieder versinnlichen können.

Wundervoll und höchst merkwürdig ist gewiss die Erfindung der Ton- und Schriftsprache, mittelst welcher man seine Gefühle und Gedanken auf das Papier befestigen, gleichsam malen und versinnlichen, sich auf eine noch so grosse Entfernung hörbar machen kann. Kaum sollte man sie für menschliche Schöpfungen halten. Aber nicht minder merkwürdig ist es, dass man auch Vorstellungen, welche uns der Gesichtssinn liefert, nämlich Gestalten, in abstracte Begriffe fassen, gleichsam denken kann, und dass die Analysis uns ein Mittel giebt, deren so viele hervorzuzaubern, als wir nur wollen.

„Die Sprache der Analysis," sagt La Place, „die vollkommenste aller Sprachen, ist schon an sich selbst ein mächtiges Hülfsmittel und Werkzeug der Entdeckung, und ihre Bezeichnungen, wenn sie glücklich gewählt sind und mit dem Gegenstande in nothwendiger Beziehung stehen, enthalten die Keime neuer Rechnungsweisen."*)

Und wer könnte schon jetzt ahnen, wie weit der nimmer

*) La Place. Théorie analytique des probabilités.

ruhende Geist diese fast noch neue, kaum 300 Jahr alte Sprache dereinst, ja schon in einem gleichen Zeitraum entwickelt haben wird, wenn sie in demselben Gange fortgeht, in welchem sie bisher begriffen? Und fortschreiten muss und wird sie, „car en matière de progressions mathématiques," sagt Descartes, „lorsqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'est pas malaisé de trouver les autres." Und hat die Natur nicht noch immer Stoff und die Fähigkeit, der eigentlichen, die Wissenschaft weiter führenden Genies noch mehrere zu schaffen?

„Die Analyse," sagt Lindenau, „diese wunderbare Geistesschöpfung, die durch künstliche Verbindung einfacher Zeichen aus den labyrinthischen Erscheinungen des Weltsystems das einzig einfache Gesetz ergründet, mit deren Hülfe der Geometer den Zustand des Weltalls umfasst und irrungslos in ferne Zukunft vorauseilt oder in die tiefe Vergangenheit zurückgeht, die uns in Klarheit zeigt, was oft Beobachtung nur dunkel ahnen lässt, wird immer fortschreiten, dafür bürgt des Menschen Streben nach dem Höchsten. Stillstand ist nicht mehr denkbar. Jetzt, wo die Theorie dahin gediehen ist, dass Bestimmungen und Voraussagungen a priori keine Träume mehr sind, ist der Reiz des weitern Forschens und Ergründens allzu mächtig, als dass irgend etwas Aeusseres den Geist des Menschen zu hemmen fähig wäre. Auch bleibt ein solches Streben niemals fruchtlos, und selbst belohnend ist jede Anstrengung, da sich ja täglich des Wissens Kreis erweitert. Reife Früchte hat die Wissenschaft bereits getragen, und für die Zukunft reifen schöne Blüthen. Männer, reich an Geist und Thaten, stehen, selbst noch thätig, an der Spitze, und Jünglinge, der Väter nicht unwerth, streben nach kühnem Ziele."*)

Auf wie mancherlei den Menschen nothwendige Kenntnisse ist nicht schon die in der That wundervolle und zauberische Analysis zum Wohle der Menschheit mit dem grössten Glück angewandt worden? auf Astronomie, Geographie, Schifffahrtskunde, Land- und Wasserbauten, Naturwissenschaft, Mechanik, Optik etc. etc., ja selbst auf ihr fern liegende Kenntnisse. Wer gab, sagt Herschel, zuerst der Chirurgie die Kühnheit, ein lebendiges Auge zu öffnen, um dem, wegen zu grosser, durch keine Linse aufzuhebender Erhabenheit der Hornhaut, Erblindeten wieder zum Lichte seiner Augen zu verhelfen? War es nicht die zuvor durch die Mathematik erlangte Kenntniss von den Gesetzen des Sehens?**)

---

*) Versuch einer geschichtlichen Darstellung der Fortschritte der Sternkunde von B. v. L. (der gewesene sächsische Minister).

**) Herschel. Ueber das Licht. Uebers. von Schmidt.

Wahrlich, in der Mathematik liegt ein mächtiger, den Menschen nur wohlthuender und merkwürdiger Genius. In die Chemie ist erst Wissenschaft gekommen, seitdem man die Mathematik zu Hülfe gerufen. Nur noch mehr Thatsachen, mehrere Kepler, dann wird auch schon ein Newton kommen, und die Chemie ebenso wie die Astronomie ihren Triumph feiern.[1])

Merkwürdig sind die erst neulich gemachten Anwendungen der Mathematik auf Botanik. „Die Pflanzenwelt", sagt Nees von Esenbeck, „wird bald das Gesetz ihrer Bildung unter einen mathematischen Ausdruck gebracht sehen, und dieses Gesetz, die wichtigste aller botanischen Entdeckungen, wird dann als der wundersame Schlüssel erscheinen, der uns zu den Urtypen des Gewächsreichs einführen und das Getriebe seiner Entwickelung bis in's Besonderste vor uns blosslegen wird" etc.[2])

„Man hat", sagt Cauchy, „die Mathematiker oftmals beschuldigt, ihre Wissenschaft (den Calcul und die mathematische Analyse) auf die Entdeckung aller Wahrheiten anwenden zu wollen. Gewiss, man soll nichts übertreiben und man kann ohne Zweifel alles, selbst die Ziffern, missbrauchen; aber man muss auch gerecht sein und gestehen, dass in sehr vielen Fällen die Wissenschaft der Zahlen und die analytische Methode uns behülflich sein können, die Wahrheit zu entdecken oder doch wenigstens zu erkennen. Die im Universum herrschende, vom Schöpfer bestimmte bewunderungswürdige Ordnung, ist oft mit Erfolg vom Mathematiker studirt, der, ergriffen von Bewunderung, in dem Augenblick, wo es ihm mit Newton gelang einen Zipfel des Schleiers zu heben, unter welchem unsern Augen verborgene, undurchdringlich geglaubte Geheimnisse lagen und aus den beobachteten Erscheinungen die Gesetze zu finden, welche sie regieren" etc.[3])

Merkwürdig ist der Versuch, den Herbart und nach ihm Drobisch von der Anwendung der Mathematik auf Psychologie gemacht hat.

---

[1]) Dumas. Geschichte der Chemie.

[2]) Walpers. Ueber die geometrische Anordnung der Blätter und Blüthenstände, aus dem Französischen des L. und A. Bravais, Schimper, Braun u. a. Ferner: Fechner über die mathematische Behandlung organischer Gestalten in den Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig. 1. Band. 1849. A. Zeising. Die Proportionen des menschlichen Körpers aus einem bisher unerkannt gebliebenen, die ganze Natur und Kunst durchdringenden morphologischen Grundgesetze entwickelt. 1854.

[3]) Mémoires sur les secours que les sciences de calcul peuvent fournir aux sciences physiques ou même aux sciences morales, et sur l'accord des théories mathématiques et physiques avec la véritable philosophie. Comptes rendus p. 134, Tom 21. 1845.

Und wer könnte jetzt schon voraussehen, wohin dies einmal führen und auf was für Gegenstände, an welche man jetzt nicht im Entferntesten denkt, die Analysis noch angewendet werden mag.*)

Melodien, welche die Phantasie des Componisten so eben schuf und auf's Papier warf, kann schon ein mittelmässiger Kenner, ohne dass sie zuvor durch ein Instrument laut zu werden brauchen, mit geistigem Ohre hören, in Gedanken lesen, den rhythmischen Klang gleichsam denken.

Nun lehrt aber die bereits mathematisch begründete Klanglehre, dass bestimmte Töne in einer bestimmten Anzahl Schwingungen bestehen und folglich auch in bestimmten arithmetischen Verhältnissen stehen. Die Töne selbst, ihre Intervalle und Dauer können also durch Zahlen ausgedrückt und umgekehrt wieder daraus dargestellt werden. Und wer möchte nun, wenn es durchaus Eins sein müsste, nicht lieber die Sache unentschieden lassen, als auf die Unmöglichkeit schwören, dass nicht irgend einmal ein zweiter, noch erleuchteterer Cartesius die Bezeichnung, um mit La Place zu reden, glücklich und so wählte, dass sie mit dem Gegenstande in nothwendiger Beziehung stände, und Rhythmus und Tempo, mithin die Melodien, wie ersterer die Gestalten, in abstracte analytische Begriffe auffasste und trotz dem, dass hier das Gefühl mit in Betracht kommt, dennoch eine, die Phantasie überbietende Quelle von Melodien erfände. So unglaublich dieses auch klingt, so könnte es doch möglich sein, dass der Geist auch ohne leibliches Auge und Ohr existiren und sich dennoch die Vorstellungen und Genüsse verschaffen könne, welche er hier durch diese beiden Instrumente erhält. — Soll aber Alles sich in reines Denken und Wissen auflösen, wo bleiben dann die göttlichen Künste? Fragt Schiller darum. Ein niederes Wesen, als der Mensch hat sie nicht, ein höheres braucht sie nicht.

Aber ein andermal vielleicht auf solche Nebenbetrachtungen zurückkommend, wollen wir jetzt unsere Einleitung damit beschliessen, dass wir zuvor noch eine Vorstellung geben, wie man aus der Gleichung einer räumlichen Grösse, Merkmale und Eigenschaften derselben entdecken kann.

VII.

Räumliche Deutung einer Function veränderlicher Grössen.

Obgleich diese Aufgabe der analytischen Geometrie, nämlich

*) Herbart's Metaphysik.

die räumliche Deutung (Discussion) einer Function veränderlicher Grössen, d. h. Darstellung der daraus entspringenden Gestalt, ihrer Eigenschaften etc. gerade die schwerste ist und sowohl Vorkenntnisse der höheren Geometrie, als auch der höheren Analysis voraussetzt, so können wir doch hier schon eine vorläufige Vorstellung davon geben. Wir nehmen als Beispiel, des leichtern Verständnisses halber, die Gleichung einer krummen Linie, welche uns bereits aus der Elementar-Geometrie bekannt ist, hier aber als noch unbekannt angenommen werden soll.

Es sei demnach folgende Gleichung, worin a eine beliebige, aber beständige Zahl bedeutet (z. B. $a=4$), durch rechtwinklige Coordinaten zu construiren und die Eigenschaften der daraus entspringenden Linie zu finden:

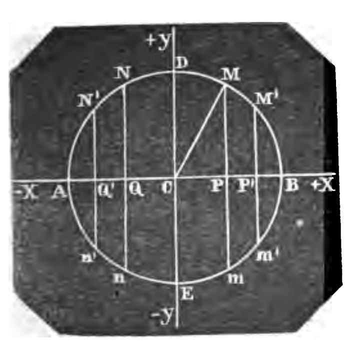
$$y^2 = a^2 - x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

1. Man ziehe zwei auf einander senkrechte Achsen XX, YY, und nehme deren Durchschnitt C als Anfangspunct.

2. Reduciren wir jetzt die Gleichung auf y, so kommt:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

3. Um nun zuerst die Puncte zu finden, in welchen die Linie die Ordinaten-Achse YY schneidet, d. h. die Grössen, um welche man vom Anfangspunct C aus, auf- oder absteigen muss, um an die Linie zu kommen, brauchen wir nur in vorhergehender Gleichung $x=0$ zu setzen. Für diesen Werth von x giebt die Gleichung $y = \sqrt{a^2} = \pm a$. Nehmen wir also $CD = + a$, $CE = - a$, so sind D und E die bestimmten Puncte, in welchen die Ordinaten-Achse, durchschnitten wird. (S. p. 21.)



4. Um nun zweitens auch zu finden, ob und in welchen Puncten die Abscissen-Linie durchschnitten wird (wo offenbar $y=0$ sein muss), suchen wir die Werthe von x, für welche y, oder der ihm gleichgeltende Ausdruck $\sqrt{a^2 - x^2}$, Null wird. Wir setzen folglich in (2):

$$\sqrt{a^2 - x^2} = 0$$

woraus: $x^2 = a^2$

und $x = \pm a$

für diese Werthe von x, wird $y = 0$. Schneiden wir also vom Anfangspunct C aus die Stücke $CB = + a$, $CA = - a$ ab, so sind A und B die fraglichen Durchschnittspuncte.

5. Weiter kann man auf der Abscissen-Linie nach keiner Seite gehen, weil für alle $x > \pm a$ in der Gleichung:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

die Grösse unter den Wurzelzeichen negativ, folglich y imaginair wird. Für $x > \pm a$ giebt es keine Ordinaten, wohl aber für alle x zwischen 0 und $\pm a$, folglich ist unsere krumme Linie eine stetige, ringsum begrenzte.

6. Da die Gleichung (2) für jede Abscisse, wie CP, immer zwei gleiche entgegengesetzte Ordinaten MP, mP giebt, so folgt, dass die krumme Linie über der Abscissen-Linie ganz so ist, wie unter derselben, oder dass sie von der Linie AB ($= 2a$) in zwei sich deckende Hälften getheilt wird.

7. Da die Gleichung (2) für gleiche entgegengesetzte Abscissen, wie CP, CQ gleiche Ordinaten giebt, so folgt, dass die krumme Linie auch durch DE ($= 2a$) in zwei sich deckende Hälften getheilt wird.

8. In (3) und (4) haben wir vier Puncte in unserer Linie gefunden, nämlich A, D, B, E, welche um die Grösse a, also gleich weit vom Anfangspunct C entfernt sind; suchen wir einmal die Entfernung CM eines andern beliebigen Punctes M vom Anfangspunct, durch seine Coordinaten $CP = x$; $MP = y$ auszudrücken, so haben wir (den Pythagoräischen Lehrsatz als bekannt vorausgesetzt):

$$CM^2 = y^2 + x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

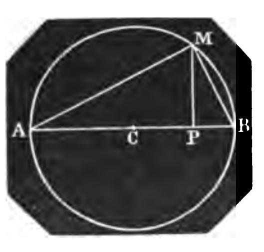
weil nun aber für jedes beliebige $x = CP$ immer (wie aus der Gleichung 1) folgt:

$$y^2 + x^2 = a^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

so ist auch:

$$CM^2 = a^2$$

$$\text{folglich: } CM = a$$



d. h. die Entfernung eines beliebigen Punctes M von C ist von der Lage (Coordinaten) desselben ganz unabhängig. Unsere krumme Linie hat also das Merkmal, dass alle ihre Puncte gleich weit, nämlich um die in der Gleichung derselben vorkommende beständige Grösse a, vom Anfangspunct entfernt sind. Die Linie ist also der bekannte Kreis, dessen Radius $AC = a$

9. Aus der Gleichung:

$$y^2 = a^2 - x^2$$

folgt: $y^2 = (a+x)(a-x)$

oder: $(a+x) : y = y : (a-x) \ldots\ldots\ldots (5)$

und wenn man statt der Zahlen die sie darstellenden Linien setzt, nämlich MP statt y; AP statt $a+x$ und PB statt $a-x$:

$$AP : MP = MP : PB$$

in Worten: jede Ordinate ist immer die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers.

10. Zieht man von den beiden Endpuncten des Durchmessers AB nach einem beliebigen Punct M der Peripherie die Sehnen AM, BM, so sind die Längen derselben durch die Lage des Punctes M vollkommen bestimmt und müssen sich also aus den Coordinaten desselben x, y und dem Radius a berechnen lassen. Es ist nämlich:

$$AM^2 = y^2 + (a+x)^2$$
$$BM^2 = y^2 + (a-x)^2$$

oder wenn wir in diese Gleichungen, um alles durch die eine veränderliche Grösse x auszudrücken, statt y^2 den gleichgeltenden Werth $a^2 - x^2$ aus (1) setzen:

$$AM^2 = a^2 - x^2 + (a+x)^2$$
$$BM^2 = a^2 - x^2 + (a-x)^2$$

oder auch, die Klammern aufgelöst:

$$AM^2 = 2a^2 + 2ax = 2a(a+x) \ldots\ldots\ldots (6)$$
$$BM^2 = 2a^2 - 2ax = 2a(a-x) \ldots\ldots\ldots (7)$$

also auch, weil $2a = AB$, $a+x = AP$, $a-x = BP$:

$$AM^2 = AB \,.\, AP$$
$$BM^2 = AB \,.\, BP$$

in Worten: Jede der beiden Sehnen im Halbkreise AM, BM ist die mittlere Proportionale zwischen dem ganzen Durchmesser und dem anliegenden Abschnitt desselben.

11. Aus den Gleichungen (6) und (7) folgt durch Addition derselben:

$$AM^2 + BM^2 = 4a^2 = (2a)^2 = AB^2$$

in Worten: die Summe der Quadrate der beiden Sehnen im

Halbkreise ist gleich dem Quadrate des Durchmessers, folglich ist auch (den magister matheseos als bekannt vorausgesetzt) der Winkel im Halbkreise immer ein rechter.

Und so könnte man, bei hinreichenden Vorkenntnissen, alle übrigen in der Elementar-Geometrie auf ganz andere Weise gefundenen Eigenschaften des Kreises aus seiner Gleichung ableiten, wie z. B. dass alle Peripherie-Winkel auf einerlei Bogen einander gleich sind etc., so wie auch den Inhalt und Umfang des Kreises aus seiner Gleichung finden. Da wir aber alles dieses schon aus der Elementar-Geometrie kennen und ohnehin hier vorläufig nur einleitende Begriffe geben wollten; so verlassen wir den Kreis mit folgenden, für alle krumme Linien geltenden Bemerkungen:

12. Wir fanden vorhin (Seite 30) die Gleichung des Kreises:

$$y^2 + x^2 = r^2$$

aus dem ihn bestimmenden Merkmal, dass alle Puncte desselben gleich weit vom Mittelpunct entfernt sind. Wir hätten aber auch dieselbe Gleichung aus dem ebenfalls ihn bestimmenden und als bekannt vorausgesetzten Merkmal finden können, dass jede Ordinate MP $= y$ die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten AP $= a + x$ und BP $= a - x$ des Durchmessers ist. Denn die Proportion:

$$a + x : y = y : a - x$$

giebt offenbar dieselbe Gleichung. Ebenso hätten wir diese auch aus dem als bekannt vorausgesetzten Merkmal ableiten können, dass alle Winkel im Halbkreise rechte sind etc.

Hieraus folgt nun aber, dass wenn die Gleichung für eine krumme Linie aus irgend einem, gleichviel welchem, sie bestimmenden Merkmal oder Eigenschaft abgeleitet worden, in dieser Gleichung dann nothwendig auch alle übrigen zahllosen Eigenschaften enthalten und daraus zu finden sein müssen.

13. In der Gleichung ist also das Bild vollkommen enthalten. Ja, sie nur drückt den Begriff der ihr entsprechenden Gestalt ganz vollkommen aus, indem alle auch noch so verborgen liegende Merkmale und Eigenschaften des Bildes, welche das Auge nie entdecken würde, aus der Gleichung herausgelesen werden können. Wirft man dagegen eine Function veränderlicher Grössen beliebig auf, so liegt darin im Allgemeinen eine Gestalt, welche man noch nie gesehen hat, und man kann dennoch alle Merkwürdigkeiten derselben in ihrer Function erkennen, ohne die

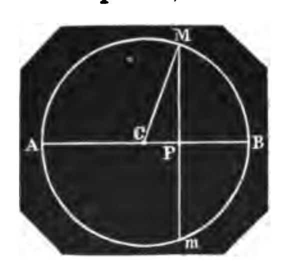
Gestalt selbst zu sehen zu brauchen oder sehen zu können, weil es in vielen Fällen gar nicht möglich ist, die Gestalten selbst, z. B. wenn sie ihre Zweige in's Unendliche treiben, so wie ihre Wendungspuncte, mechanische Eigenschaften etc. bildlich darzustellen. Solche Sachen kann man nur denken, begreifen, nicht anschauen.*)

---

*) Plato sagt: „Unsere Gedanken und Begriffe strömen so durch den unendlichen Raum.“ (Die Platonische Ideenwelt.) Sie kehren also in unsern Geist ein, so wie manche materielle Stoffe in unsern Körper, ohne dass wir ihren Einzug merken; und die Gedanken wären demnach eben so wenig von uns selbst erschaffen, eben so wenig unser eigen, wie jene materiellen Stoffe. Wenn diese Platonische Vorstellung aber irrig ist und wir nicht absichtslos, sondern selbstständig Gedanken fassen und Begriffe bilden, so ist es psychologisch gewiss sehr merkwürdig, dass mit solchen Gedanken und Begriffen oft eine zahllose Menge anderer Gedanken und Begriffe verknüpft, darin eingeschachtelt ist, welche wir mit Wissen nicht damit verknüpft, nicht hineingelegt haben; dass wir absichtslos etwas schaffen, was wir gar nicht haben schaffen wollen; dass wir unsere Gedanken und Begriffe, als wenn es (materielle) Substanzen wären, analysiren und studiren können und müssen, wenn wir alles erkennen wollen, was damit verknüpft ist, was darin liegt und was daraus folgt. Wir werfen eine beliebige Function $\varphi(x, y) = 0$ auf, und haben damit absichtslos eine Gestalt hervorgerufen, welche mit der Bahn eines Sternes, mit der Gestalt eines Blumenblattes übereinstimmen, die eine unendliche Menge Eigenschaften und Sonderbarkeiten enthalten kann. Warum können wir dies Alles nicht gleich wissen? So treibt — sich selbst wohl unbewusst — nach nothwendigen Gesetzen der Baum seine Zweige, Blüthen und Früchte, die Henne das Ei, ohne zu wissen warum, was darin ist und was daraus folgt. Sind denn ein paar methodisch verbundener Hieroglyphen $\varphi(x, y) = 0$ lebend, schaffend? sind sie klüger als wir selbst? bilden sie eine Sprache, „die für uns dichtet und denkt?“ enthalten sie, schicklich gewählt, „die Keime zu neuen Entdeckungen?“ Ich denke mir eine krumme Linie, deren sämmtliche Puncte von einem gegebenen gleich weit entfernt sind. In diesem nur gebildeten Begriff liegt aber schon, und folgt daraus, ohne dass ich es gewusst noch gewollt, also auch nicht gleich mitgedacht habe, dass jede durch den Mittelpunct gehende grade Linie jene krumme in zwei gleiche Theile theilt; dass alle Peripheriewinkel auf einerlei Bogen einander gleich sind etc. — Schon Plato hat sich über die vielen und merkwürdigen Eigenschaften der räumlichen Grössen, und dass die mathematischen Begriffe so fruchtbar sind, so Vieles enthalten, sich gleichsam selbst erzeugen, gewundert. Ebenso mag es sich mit dem absichtlichen oder absichtslosen Denken und Produciren der ganzen Natur verhalten und das unerschaffene Fatum sowohl in der sogenannten materiellen als geistigen Natur existiren. Der Grenzbote sagt: „Da die Betrachtung der Mathematik, bisher die einzige streng logische Wissenschaft, lehrt, dass die Resultate unsers Denkens der Naturwirklichkeit völlig entsprechen, so müssen die Gesetze unserer Vernunftbewegungen mit den Naturgesetzen identisch sein.“

14. Aus der Verschiedenheit mehrerer Gleichungen einerlei Grades darf man nicht immer auf Verschiedenheit der daraus hervorgehenden krummen Linien schliessen. Man kann nämlich für eine und dieselbe Linie, wenn man die Lage der Coordinaten gegen einander oder auch nur den Anfangspunct anders nimmt, verschiedene Gleichungen finden, wie wir gleich durch ein Beispiel am Kreise zeigen wollen.

Aus dem Merkmal des Kreises, dass jede Ordinate die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers ist, fanden wir die Gleichung desselben, AB als Abscissen-Linie und den Mittelpunct C zum Anfangspunct genommen:



$$y^2 + x^2 = r^2 \ldots\ldots (1)$$

Suchen wir nun aus demselben Merkmal eine Gleichung für denselben Kreis, indem wir nicht C, sondern A als Anfangspunct der auf AB $= 2r$ gezählten Abscissen nehmen, wo demnach jetzt AP$=x$, PB$=2r-x$, MP$=y$ ist, so folgt:

$$x : y = y : 2r - x$$

hieraus: $y^2 = 2rx - x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

also: $y = \sqrt{2rx - x^2}$

15. Wäre nun umgekehrt diese Gleichung (2) gegeben, deren Ursprung wir jetzt nicht wissen wollen, so kann man leicht zeigen, dass darin ein gleicher Kreis, wie in der vorhergehenden Gleichung (1) enthalten ist, denn setzt man in die Gleichung:

$$y = \sqrt{2rx - x^2}$$

$x=0$, so wird auch $y=0$, die Linie geht also durch den Anfangspunct A.

Für $x = r =$ AC wird $y = \sqrt{r^2} = \pm r$.
Für $x = 2r$ wird $y = 0$.

Für negative Abscissen, so wie für $x > 2r$, wird die Grösse unter dem Wurzelzeichen negativ, folglich y imaginair.

Für alle Werthe von $x=0$ bis $x=2r$, giebt es immer zwei gleiche entgegengesetzte Ordinaten, die stetig von 0 bis $\pm r$ wachsen, und dann wiedervon $\pm r$ bis 0 abnehmen. Die Linie wird also durch AB in zwei gleiche Hälften getheilt.

Suchen wir einmal die Entfernung eines beliebigen Punctes

M, vom Mittelpunct C der Linie AB, durch die Coordinaten von M zu bestimmen, so ist:

$$CM^2 = MP^2 + CP^2$$

oder, da hier $AP = x$, $CP = AP - AC = x - r$, $MP = y$

$$CM^2 = y^2 + (x - r)^2$$

setzen wir hierin, um nur eine veränderliche Grösse x zu behalten, statt y^2 den gleichgeltenden Ausdruck $2rx - x^2$, so ist:

$$CM^2 = 2rx - x^2 + (x - r)^2$$

hieraus: $CM = r$

folglich ist die Entfernung eines beliebigen Punctes M von C, von seiner Lage unabhängig, weil in dem Ausdruck $CM = r$ keine veränderliche Grösse mehr enthalten ist.

Und so könnte man alle übrigen Eigenschaften des Kreises auch aus dieser Gleichung (2) ableiten.

16. Wir sehen also, dass die Verschiedenheit der beiden, einerlei krumme Linien enthaltenden, Gleichungen:

$$y^2 = r^2 - x^2$$
$$y^2 = 2rx - x^2$$

blos von der verschiedenen Lage des Anfangspuncts herrührt. Dies ist ein wichtiger Punct, den wir gehörigen Orts, in einem eigenen Capitel, über die sogenannte Coordinaten-Verwandlung, umständlicher erörtern werden. Hier nur soviel: dass die Entdeckung der Eigenschaften einer krummen Linie aus ihrer Gleichung, durch eine dazu bequeme Lage der Coordinaten-Achsen und des Anfangspuncts sehr gefördert werden kann, und dass man dieserhalb den Anfangspunct manchmal verlegen und den Achsen eine andere Richtung geben, die Figur gleichsam aus verschiedenen Standpuncten beobachten muss.

17. Allgemeine Methoden, alle Eigenschaften einer Linie aus ihrer Gleichung zu finden, lassen sich nicht geben. Es hängt dies ganz von Vorkenntnissen und vom Scharfsinn ab. Es fallen hiebei oft viele unnöthige (versuchsweise) Rechnungen vor, weil man nicht immer gleich den bequemsten Weg, ja manchmal einen solchen einschlägt, der zu gar nichts führt. Hat man indessen erst einige Eigenschaften gefunden, so kann man oft durch diese leicht noch mehrere entdecken.

Manche die krumme Linie betreffenden wichtigen Puncte, Linien etc. lassen sich indessen nach allgemeinen Methoden bestimmen, wie z. B. Mittelpuncte, Durchschnittspuncte mit den

Achsen oder andern graden Linien, Biegungspuncte, Durchmesser. Sehnen, Tangenten, grösste und kleinste Ordinaten, Lage und Lauf der unendlichen Zweige, so wie die Längen der krummen Linien, die von ihnen eingeschlossenen Flächen etc., alles Sachen, von denen gehörigen Orts gehandelt werden muss.

Und nachdem wir nun die nothwendigen Vorbegriffe der höhern Geometrie vorausgeschickt, den Anfänger auf das, was er zu erwarten und worauf er seine Betrachtungen zu richten hat, vorbereitet haben, können wir jetzt zu einem mehr geordneten Studium schreiten. — Die vorhin angedeuteten Hauptaufgaben sind, kurz wiederholt, folgende zwei:

1. die nach beliebig aufgeworfenen analytischen Gesetzen $\varphi(x,y)=0$ entspringenden Züge darzustellen und ihre Eigenschaften zu entdecken;
2. aus einem bekannten mechanischen Bildungsgesetz eines Zuges, oder aus einem ihn bestimmenden Merkmal, die Gleichung und daraus die Eigenschaften desselben abzuleiten.

Die erste Aufgabe giebt einen unerschöpflichen Stoff zu immer neuen Untersuchungen, und wir könnten sie offenbar dadurch streng wissenschaftlich ordnen und eintheilen, indem wir mit algebraischen Functionen anfangend, diese nach der Reihe, vom 1. Grade an, vornähmen. Allein, das Leben mit seinen Anforderungen berücksichtigend, müssen wir uns begnügen, die Unendlichkeit dieser Wissenschaft angedeutet zu haben, und uns auf eine Auswahl des Nothwendigsten und Nützlichsten beschränken. Wir dürfen deshalb nicht über Functionen zweiten Grades hinausgehen. Auch werden wir des leichtern Verständnisses halber, die beiden eben erwähnten Hauptaufgaben stets in umgekehrter Ordnung auf einander folgen lassen.

Schliesslich sei noch erwähnt: dass die höhere Geometrie ebenso wie die Euklidische, in ebene und körperliche oder mit zwei und drei Coordinaten (Functionen zweier und dreier veränderlichen Grössen) eingetheilt wird.

ERSTER THEIL.

Analytische Geometrie in der Ebene.

Erstes Buch.

Functionen zweier veränderlichen Grössen ersten Grades, oder die grade Linie.

1.

Die grade Linie wird auf mannigfache Weise mit krummen Linien in Verbindung gesetzt, z. B. als Achse, Durchmesser, Sekante, Tangente etc. Kurzum die grade Linie dient uns bei Betrachtung krummer Linien gleichsam als Richtschnur, und deshalb ist es nothwendig, die einfache grade Linie selbst, obgleich sie sonst aus der Elementar-Geometrie schon hinlänglich bekannt ist, dennoch auch analytisch aufzufassen, d. h. eine Gleichung für sie zu entwickeln, aus welcher sie umgekehrt wieder abgeleitet werden kann.

Dass übrigens die grade Linie nothwendig zum System der analytischen Geometrie gehört, folgt auch schon aus VI, 1, weil, wenn man alle möglichen Functionen zweier veränderlichen Grössen construiren wollte, man sicher auf eine solche treffen würde, aus welcher eine grade Linie entspränge.

2.

Um für eine bestimmte Linie eine Gleichung zu entwickeln, müssen ausser ihrem Bildungsgesetze oder einem sie bestimmenden Merkmal auch noch diejenigen beständigen Maasse gegeben sein, welche die Grösse derselben bestimmen, wie z. B. beim Kreise der Radius. Ausserdem muss noch die Lage des Anfangspuncts gegen dieselbe gegeben sein, oder erst bestimmt werden, so wie auch das zu gebrauchende Coordinatensystem.

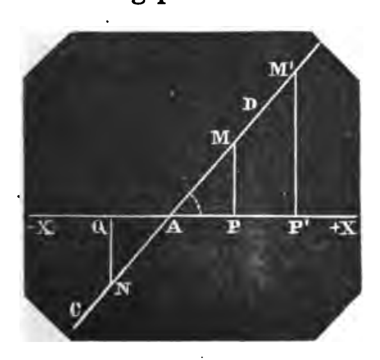
Da nun in Betreff der Parallel-Coordinaten die Gleichung für eine Linie in der Regel am einfachsten ausfällt, wenn man

die Coordinaten rechtwinklig nimmt, so sollen hinfüro, so lange nicht ausdrücklich ein Anderes erwähnt wird, unter dem Worte Coordinaten stets rechtwinklige verstanden sein.

Dies vorausgesetzt, können wir nun die Gleichung für eine bestimmte grade Linie leicht finden, wenn nur ihre Lage gegen eine beliebig genommene Abscissen-Achse, nämlich der Winkel, unter welchem sie dieselbe schneidet, so wie der Abstand des Durchschnittspuncts, von dem in der Achse willkürlich gewählten Anfangspunct gegeben, oder durch vorhergehende Messung erst bestimmt worden ist. Hinsichtlich des Anfangspuncts giebt es drei Fälle zu unterscheiden. Er kann im Durchschnittspunct, rechts oder links desselben liegen, welche Fälle wir in folgenden drei Aufgaben einzeln betrachten wollen.

3.

Aufgabe. Die Gleichung für eine grade Linie CD zu finden, welche die Abscissen-Linie unter einem gegebenen Winkel DAX im Anfangspunct A schneidet.*)



Auflösung. Da hier der Winkel DAX, unter welchem die Linie CD die Abscissen-Linie schneidet, mithin auch die trigonometr. tangente dieses Winkels gegeben, und für die ganze Linie in ihrer unendlichen Ausdehnung unveränderlich oder eine beständige Grösse ist, und die Abscissen vom Durchschnittspunct A aus gerechnet werden sollen, so erhält man nach den ersten Lehren der Trigonometrie die zu einer beliebigen Abscisse $AP = x$ gehörende rechtwinklige Ordinate $MP = y$ ganz einfach, indem man nur die Abscisse mit der trigonometrischen tangente von DAX multiplicirt. Es ist nämlich:

$$MP = AP \,.\, \text{tg } DAX$$
$$M'P' = AP' \,.\, \text{tg } DAX$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

oder, indem wir, der Kürze wegen, den beständigen Factor

*) Von hieran ist die Kenntniss der Trigonometrie erforderlich. Wer ohne dieselbe noch etwas weiter gehen will, muss mit dem zweiten Buche anfangen.

(tg D A X) mit dem einfachen Zeichen a, und die veränderlichen Coordinaten wie üblich bezeichnen:

$$y = ax$$

die geforderte Gleichung der Linie CD, nach welcher, wenn x alle stetig auf einander folgenden Werthe erhält und die zugehörigen Ordinaten berechnet und aufgetragen (gedacht) werden, alle Puncte der unbegrenzt gedachten Linie richtig zum Vorschein kommen. Denn nimmt man auch nach der andern Seite für x negative Werthe (z. B. $x =$ AQ), so wird auch:

$$y = \mathrm{NQ} = a(-x) = -ax$$

negativ, und man erhält, in dieser Richtung fortgehend, nach derselben Gleichung alle Puncte des unterhalb der Abscissen-Achse liegenden Theils der unendlichen graden Linie CD.

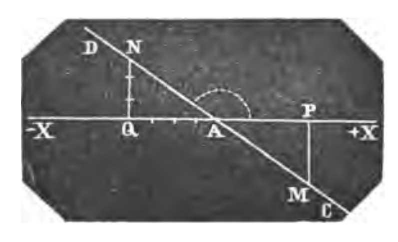
4.

Es ist klar, dass wenn umgekehrt eine Gleichung ersten Grades von der Form:

$$y = ax$$

gegeben wäre, die Construction derselben eine grade Linie giebt, welche die Abscissen-Achse im Anfangspunct und unter einem Winkel schneidet, dessen tangente $= a$ ist. Für $a = 1$ z. B. wäre dieser Winkel 45^0, weil tg $45^0 = 1$. Ist der Coefficient a negativ, hätte man z. B. die Gleichung:

$$y = -\tfrac{3}{4}x$$

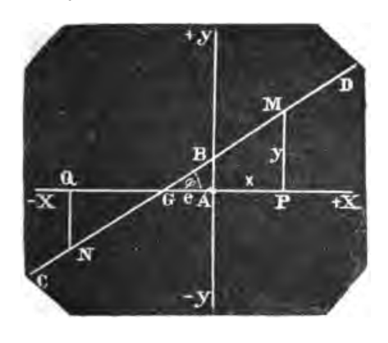


so giebt dieselbe für positive Abscissen negative Ordinaten und umgekehrt für negative Abscissen positive Ordinaten. Dann macht die Linie CD mit der positiven Seite der Abscissenachse einen stumpfen Winkel.

Anmerkung. Bei Parallel-Coordinaten rechnet man die Winkel von der positiven Abscissen-Richtung gegen die positive Ordinaten-Richtung nur von 0 bis 180^0. Winkel über 180^0 und negative Winkel werden bei Parallel-Coordinaten nicht vorkommen. Aus der Trigonometrie ist bekannt, dass die tangenten und cosinus zweier Nebenwinkel gleich und entgegengesetzt sind. Ist z. B. tg DAQ $= \tfrac{3}{4}$, so ist tg DAP $= -\tfrac{3}{4}$.

5.

Aufgabe. Die Gleichung einer graden Linie CD zu finden, welche die Abscissen-Achse **links** vom Anfangspunct A, in der gegebenen Entfernung $AG = e$ und unter dem gegebenen spitzen Winkel $DGX = \varphi$ schneidet



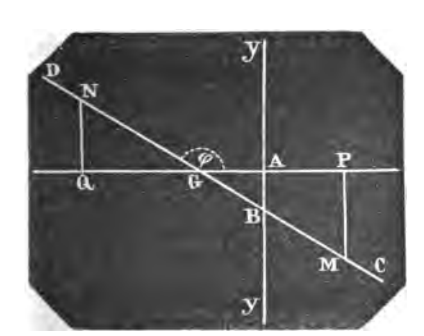
Auflösung. Die Ordinate $MP = y$ wird erhalten, wenn man die um AG vergrösserte Abscisse AP, nämlich $GP = x + e$, mit der tangente des Winkels φ multiplicirt, daher:

$$y = \operatorname{tg}\varphi.(x+e) = \operatorname{tg}\varphi.x + \operatorname{tg}\varphi.e$$

oder, indem man, der Kürze wegen, die beständigen Grössen in dieser Gleichung, wie üblich, nämlich $\operatorname{tg}\varphi$ mit a bezeichnet und $\operatorname{tg}\varphi.e = AB = b$ setzt, so ist:

$$y = ax + b$$

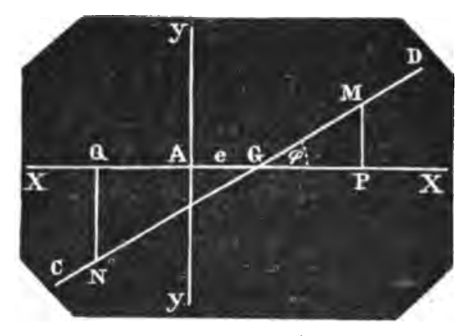
die verlangte Gleichung.



Ist der Winkel φ ein **stumpfer**, so findet eine ähnliche Gleichung Statt, in welcher dann aber die mit a bezeichnete **tangente** dieses Winkels, nämlich der Coefficient von x, so wie auch b negativ ist. Die für diese Lage der Linie CD leicht zu findende Gleichung $y = -ax - b$ giebt dann für positive Abscissen negative Ordinaten.

6.

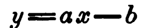
Aufgabe. Die Gleichung einer graden Linie CD zu finden, welche die Abscissen-Linie unter einem gegebenen spitzen Winkel φ und **rechts** vom Anfangspunct in der gegebenen Entfernung $AG = e$ schneidet.



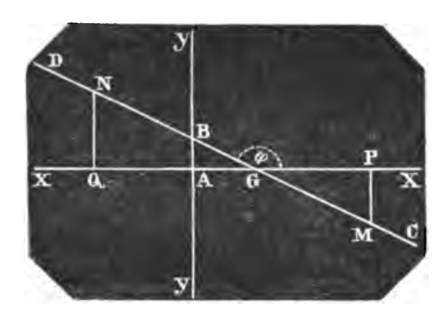
Auflösung. Man erhält offenbar die Ordinate $MP = y$, wenn man die zugehörige, um AG verminderte Abscisse, nämlich $GP = AP - AG = x - e$ mit der tangente des Winkels φ multiplicirt. Daher:

$$y = \text{tg}\,\varphi . (x - e) = \text{tg}\,\varphi . x - \text{tg}\,\varphi . e$$

oder, indem man wieder, der Kürze wegen, $\text{tg}\,\varphi = a$ und g $\varphi . e = b$ (=AB) setzt:



$$y = ax - b$$



Anmerkung. Ist der Winkel φ, unter welchem die Linie CD die Abscissen-Achse rechts vom Anfangspunct schneidet, ein stumpfer, so ist dessen tangente (a) negativ, die Grösse b aber positiv. Für diesen Fall ist die Gleichung:

$$y = -ax + b$$

7.

Die im Vorhergehenden für die grade Linie gefundenen Gleichungen, deren Verschiedenheit, wie man sieht, bloss von der Lage des Anfangspuncts gegen dieselbe und von dem Winkel, den sie mit der Abscissen-Achse macht, herrührt, lassen sich in der einzigen Formel:

$$y = ax + b$$

zusammenfassen. Und es ist nun leicht einzusehen, dass umgekehrt jede willkürlich aufgeworfene Gleichung ersten Grades von dieser Form, construirt, nothwendig eine grade Linie giebt, deren Lage gegen die angenommene Abscissen-Linie und den Anfangspunct durch die beiden beständigen Coefficienten a und b vollkommen bestimmt ist. Der Coefficient b giebt nämlich, je nachdem er positiv oder negativ ist, die Höhe oder Tiefe, in

welcher die Linie über den Anfangspunct weggeht, also das Stück, welches sie von der durch den Anfangspunct gedachten Ordinaten-Achse YY abschneidet. Denn für $x=0$ giebt die Gleichung $y=b$. Ist $b=0$, so geht die Linie durch den Anfangspunct.

Der Coefficient von x, nämlich a, ist nach dem Vorhergehenden die trigonometrische Tangente des Winkels, unter welchem die Linie die Abscissen-Achse schneidet, und dieser Winkel ist spitz oder stumpf, je nachdem a positiv oder negativ, jedenfalls durch diesen Coefficienten der Grösse nach bestimmt.

Um zu finden, in welchem Abstand vom Anfangspunct die Abscissen-Achse geschnitten wird, wo $y=0$ ist, suchen wir den Werth von x, für welchen y oder der ihm gleichgeltende Ausdruck $ax+b$ Null wird. Nun wird aber:

$$ax+b=0$$

$$\text{wenn } x=-\frac{b}{a}$$

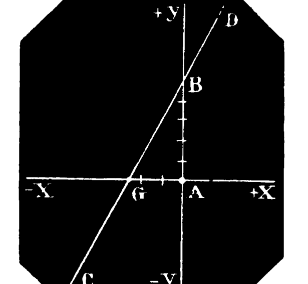
gesetzt wird. Denn für diesen Werth von x ist

$$y=a\left(-\frac{b}{a}\right)+b=0$$

der Durchschnittspunct in der Abscissen-Linie liegt also um $\frac{b}{a}$ links oder rechts vom Anfangspunct, je nachdem a und b gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben.

Beispiel. Die Gleichung:

$$y=2x+5$$



giebt eine grade Linie, welche von der Ordinaten-Achse das Stück $AB=+5$ und von der Abscissen-Achse das Stück $AG=-2\frac{1}{2}$ abschneidet, denn für $x=0$ ist $y=5$, und für $y=0$ ist $x=-2\frac{1}{2}$. Durch diese beiden Puncte B und G ist die Lage der Linie CD gegen XX bestimmt. Will man noch ihre Neigung gegen XX wissen, so hat man, weil

$$\text{tg DGX}=2$$

$$\text{DGX}=63^0\ 26'\ 5''.8$$

8.

Aufgabe. Wir haben bereits in der Einleitung (V, B, 1, 2) gesehen, dass aus Gleichungen einerlei Grades zwischen zwei

veränderlichen Grössen ganz verschiedenartige Linien hervorgehen können. Dies ist jedoch mit Gleichungen ersten Grades nicht der Fall. Man kann behaupten, dass jede Gleichung ersten Grades immer eine grade Linie enthält. Wie lässt sich dieses beweisen?

Auflösung. Die allgemeine Form, in welcher alle möglichen Gleichungen ersten Grades zweier veränderlichen Grössen (x, y) enthalten sind, lässt sich (indem man gleichnamige Glieder in eins zusammenfasst) so schreiben:

$$Ay + Bx + C = 0$$

worin A, B, C alle möglichen positiven, oder negativen beständigen Coefficienten, 1 und 0 nicht ausgenommen, vertreten.*)

Aus dieser allgemeinen Gleichung folgt zuerst:

$$Ay = -Bx - C$$

oder, indem wir, um diese Gleichung zu construiren, den Multiplicator A (weil wir doch nur die Ordinate selbst, und nicht ein Vielfaches derselben berechnen und auftragen) durch Division fortschaffen;

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A}$$

Welche Werthe und Vorzeichen die Coefficienten A, B, C nun auch haben mögen, so sind doch $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$ in jedem Fall beständige (unveränderliche) Grössen. Bezeichnen wir sie, der Kürze wegen, mit einfachern Zeichen und setzen deshalb: $-\frac{B}{A} = a$ und $-\frac{C}{A} = b$, so lässt sich die allgemeine Gleichung ersten Grades auch so schreiben:

$$y = ax + b$$

und in dieser aus § 7 bekannten Form erkennt man die Gleichung einer graden Linie, in welcher die Coefficienten a, b die § 7 angegebene Bedeutung haben.

Anmerkung 1. Je kleiner a ist, je kleiner ist der Winkel, den die Linie mit der Abscissen-Achse macht. Wäre $a = 0$, so wäre

*) Aus der Gleichung $2y + 3 - 2x = 17 + 8x - 3y$ z. B. folgt: $5y - 10x - 14 = 0$, und hieraus: $y = 2x + 2\frac{4}{5}$.

$$y = 0 \,.\, x + b$$
$$\text{oder } y = b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

die Gleichung einer graden Linie, welche in dem Abstande $+b$ mit der Abscissen-Achse parallel geht, indem für jeden Werth von x doch immer $y = b$ ist. Wäre zugleich auch $b = 0$, so wäre

$$y = 0 \,.\, x$$
$$\text{oder } y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

die Gleichung einer graden Linie, welche mit der Abscissen-Achse zusammenfällt.

Wäre in der Gleichung: $Ay + Bx + C = 0$ der Coefficient $A = 0$, so findet die Division durch denselben nicht mehr Statt (weil sie unverständliche Quotienten giebt). In diesem Fall ist die Gleichung auf x zu reduciren, und man erhält dann:

$$x = 0 \,.\, y - \frac{C}{B}$$
$$\text{oder } x = -\frac{C}{B} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

als die Gleichung einer graden Linie, welche mit der Ordinaten-Achse in dem Abstande $-\frac{C}{B}$ parallel geht. Ist auch $C = 0$, so ist

$$x = 0 \,.\, y$$
$$x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

die Gleichung einer graden Linie, welche mit der Ordinaten-Achse zusammenfällt.

* 9.

Wir haben im vorhergehenden § bewiesen, dass jede Gleichung ersten Grades zweier veränderlichen Grössen, oder die sie alle begreifende allgemeine Gleichung:

$$Ay + Bx + C = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

immer eine grade Linie giebt, indem wir diese Gleichung auf folgende, bereits in den früheren §§ für die grade Linie gefundene zurückführten:

$$y = ax + b \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Man kann nun aber auch, ohne diese Form als bekannt vorauszusetzen, unmittelbar zeigen, dass aus der allgemeinen Gleichung (1) nothwendig eine grade Linie hervorgehen muss,

indem man nachweist, dass in ihr ein bereits aus der Elementar-Geometrie bekanntes Merkmal der graden Linie enthalten ist.*)

Ein solches, die grade Linie von allen krummen unterscheidendes Merkmal ist nun aber, dass die Differenz je zweier ganz beliebigen Abscissen zur Differenz der zugehörigen Ordinaten ein beständiges Verhältniss habe. Dieses Merkmal folgt aus der obigen Gleichung (2), auf welche erstere sich immer reduciren lässt.

Bezeichnen wir nämlich die Grössen zweier beliebigen Abscissen mit x' und x'' und die dazu gehörenden beiden Ordinaten mit y', y'', so dass also laut Bedingung der Gleichung (2)

$$y' = ax' + b \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$y'' = ax'' + b \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

subtrahirt man nun die dritte Gleichung von der vierten, so kommt:

$$y'' - y' = a(x'' - x')$$

hieraus: $$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = a$$

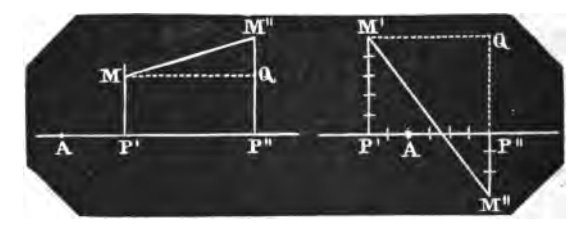
d. h. die Differenz zweier beliebigen Ordinaten $y'' - y'$ durch die Differenz ihrer Abscissen $x'' - x'$ dividirt, giebt immer a zum Quotienten, ein Merkmal, welches, wie wir wissen, nur der graden Linie zukommt.

10.

Aufgabe. Es ist die Lage zweier Puncte M′, M″ durch ihre Coordinaten gegeben, nämlich:

für den Punct M′) $AP' = x'$; $M'P' = y'$
„ „ „ M″) $AP'' = x''$; $M''P'' = y''$

Man sucht die hiedurch bestimmte Entfernung der beiden Puncte $M'M'' = d$



*) Wenn man beweisen will, dass in einer Gleichung eine genannte Linie enthalten ist, so ist offenbar diese Linie oder ein ihr ausschliesslich zukommendes Merkmal als schon bekannt vorausgesetzt.

Auflösung. Denkt man sich durch den einen Punct M′ eine Linie parallel mit der Abscissen-Achse gezogen, so schneidet diese die Ordinate des andern Puncts M″ (oder doch ihre Verlängerung, Fig. 2) in einem Punct Q, und es ist allemal

$$M'Q = AP'' - AP' = x'' - x'$$
$$M''Q = M''P'' - M'P' = y'' - y'$$

folglich (vermöge des pythagoräischen Lehrsatzes):

$$d^2 = (y'' - y')^2 + (x'' - x')^2$$

hieraus, weil immer $(a-b)^2 = (b-a)^2$, in üblicher Schreibart

$$d = \sqrt{(y' - y'')^2 + (x' - x'')^2}$$

Wäre z. B. (Fig. 2)

für M′) $x' = -2$. $y' = +5$
für M″) $x'' = +4$. $y'' = -3$
so ist: $x' - x'' = -6$. $y' - y'' = +8$
$d = 10$.

11.

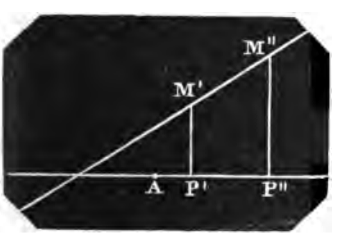
Aufgabe. Es sind die Coordinaten zweier Puncte M′ und M″ gegeben, nämlich:

für M′) $AP' = x'$; $M'P' = y'$
für M″) $AP'' = x''$; $M''P'' = y''$

Sei z. B. in bestimmten Zahlen:

$$x' = 2,\ y' = 4$$
$$x'' = 6,\ y'' = 7$$

Es wird die Gleichung der durch diese beiden bestimmten Puncte M′ (x', y') und M″ (x'', y'') *) gehenden graden Linien verlangt.



Auflösung. Die geforderte Gleichung muss jedenfalls die Form

$$y = ax + b$$

haben. Die beständigen Coefficienten a und b sind hier noch unbekannt. Laut Bedingung der Aufgabe

*) Gegebene oder als bestimmt zu betrachtende Coordinaten pflegt man durch Beistriche zu bezeichnen, um sie dadurch von den unbestimmten oder laufenden Coordinaten zu unterscheiden; M′ (x', y') bedeutet einen durch die Coordinaten x', y' bestimmten Punct M′.

müssen diese Coefficienten nun so beschaffen sein, dass die Gleichung (1), wenn man darin $x=x'=2$ nimmt, $y=y'=4$ giebt, und wenn man statt x, $x''=6$ setzt, dann $y=y''=7$ kommt. Dies giebt uns also, wenn wir, um allgemeine Formeln zu erhalten, in die Gleichung:

$$y=ax+b \dots\dots\dots\dots (1)$$

statt x und y, vorläufig die noch unbestimmt zu denkenden Grössen x', x'', y', y'', und nicht gleich die hier Beispiels halber dafür genommenen bestimmten Zahlen setzen, was am Ende der Rechnung geschehen kann, folgende zwei Bedingungsgleichungen:

$$y'=ax'+b \dots\dots\dots\dots (2)$$
$$y''=ax''+b \dots\dots\dots\dots (3)$$

aus welchen nun die unbekannten, aber durch x', y', x'', y'' bestimmten Coefficienten a und b durch das gewöhnliche Eliminations-Verfahren (Algebra § 158) leicht zu berechnen sind.

Subtrahirt man die zweite Gleichung von der ersten, so wird die eine Unbekannte b eliminirt und man erhält:

$$y'-y''=a(x'-x'')$$

$$\text{folglich: } a=\frac{y'-y''}{x'-x''}$$

Diesen für a gefundenen Werth in (2) substituirt, wird auch b bekannt. Es ist nämlich:

$$y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}.x'+b$$

$$\text{folglich: } b=y'-\frac{y'-y''}{x'-x''}.x'$$

Setzt man nun diese für a und b gefundenen Werthe in die allgemeine Form:

$$y=ax+b$$

so erhält man die verlangte Gleichung der durch die beiden bestimmten Puncte M' (x', y') und M'' (x'', y'') gehenden graden Linie, nämlich:

$$y=\frac{y'-y''}{x'-x''}.x+y'-\frac{y'-y''}{x'-x''}.x' \dots\dots (4)$$

Für unser Beispiel ist, wenn man jetzt für x', y', x'', y'' die angenommenen Zahlen setzt:

$$y = \tfrac{3}{4}x + 2\tfrac{1}{2}$$

Nimmt man hierin $x = 2$, so wird richtig $y = 4$ und für $x = 6$ wird $y = 7$.

12.

Die vorhergehende Rechnung zur Bestimmung der Coefficienten a und b lässt sich etwas kürzer so führen:

$$(1)\; y = ax + b \text{ (gesuchte Gleichung)}$$

$$\left.\begin{array}{l}(2)\; y' = ax' + b \\ (3)\; y'' = ax'' + b\end{array}\right\} \text{(Bedingungs-Gleichungen)}$$

Subtrahirt man nun die dritte Gleichung von der zweiten, und dann die zweite von der ersten, so kommen die beiden folgenden:

$$y' - y'' = a(x' - x'') \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$y - y' = a(x - x') \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

aus der Gleichung 4 folgt

$$a = \frac{y' - y''}{x' - x''}$$

und wenn man diesen Werth in (5) setzt, so hat man in üblicher Form

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x') \ldots\ldots\ldots (6)$$

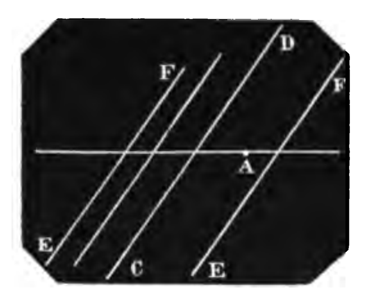
als die verlangte Gleichung der durch die beiden Puncte M′ (x', y'), M″ (x'', y'') gehenden graden Linie.

Setzt man zur Probe $x = x'$, so wird richtig $y = y'$ und für $x = x''$ wird $y = y''$.

Diese hier nur in etwas anderer Form geschriebene Gleichung führt auf die Gleichung (4) § 11 zurück, wenn man die Klammer auflöst und das linker Hand stehende y' auf die andere Seite schafft. In letzterer Form ist aber diese später häufig vorkommende Gleichung bequemer anzuwenden, auch leichter in Erinnerung zu rufen, indem man sie, so wie hier geschrieben, fast unmittelbar aus der Figur selbst entnehmen kann.

13.

Aufgabe. Es ist die Gleichung einer geraden Linie CD gegeben. Man sucht die Gleichung einer andern (über dieselbe Abscissen-Achse construirten und auf denselben Anfangspunct bezogenen) graden Linie EF, welche mit ersterer parallel läuft



Auflösung. Es sei die gegebene Gleichung für die Linie CD

$$y = ax + b \ldots. (1)^{*})$$

die für die Parallele EF zu findende Gleichung

$$y = a'x + b' \ldots (2)$$

Weil die beiden Linien parallel sein sollen, so sind ihre Neigungswinkel gegen die Abscissen-Linie, also auch die Tangenten dieser Winkel gleich und deshalb müssen auch nothwendig die Coefficienten von x in beiden Gleichungen, a' und a (welches ja die Tangenten sind), gleich sein. Die gesuchte Gleichung einer mit $y = ax + b$ parallelen Linie ist also

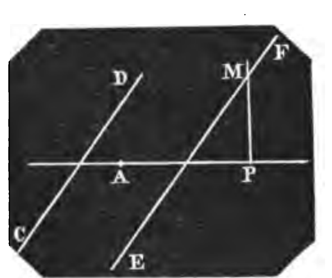
$$y = ax + b'$$

in welcher, weil nur eine Bedingung, der Parallelismus, gegeben, und unzählige, mit $y = ax + b$ parallele Linien möglich sind, der Coefficient b' natürlich unbestimmt und ganz beliebig bleibt.

Nimmt man $b' = b$, so fallen beide Linien zusammen. Nimmt man $b' > b$, so geht EF oberhalb CD und für $b' < b$, unterhalb CD weg, und für $b' = 0$ durch den Anfangspunct. Für ein und dasselbe a verursacht eine Veränderung von b' blos eine parallele Verschiebung.

14.

Aufgabe. Die Gleichung einer graden Linie CD ist gegeben, man sucht die Gleichung einer zweiten EF, welche mit ersterer parallel und zugleich durch einen bestimmten Punct M' (x', y') geht.



Auflösung. Sei die für CD gegebene Gleichung

$$y = ax + b \ldots (1)$$

die für EF zu findende habe vorläufig die Form

*) Der Anfänger wird wohlthun, zu dieser und allen folgenden Aufgaben bestimmte Beispiele in Zahlen zu nehmen.

$$y = a'x + b' \ldots\ldots\ldots\ldots (2)^{*)}$$

Zufolge der einen Bedingung, dass die zweite Linie mit der ersten parallel sein soll, muss nothwendig $a' = a$ sein; die gesuchte Gleichung ist also schon näher bekannt, diese:

$$y = ax + b' \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

damit diese Linie nun auch durch den gegebenen Punct M' (x', y') geht, muss b' so beschaffen sein, dass die Gleichung (3) für $x = x'$, $y = y'$ giebt, daher zur Bestimmung dieses b' die Bedingungsgleichung:

$$y' = ax' + b' \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Subtrahirt man (4) von (3), so wird die Unbekannte b' eliminirt, und man hat in üblicher Form

$$y - y' = a(x - x') \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

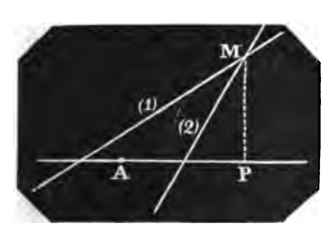
als die verlangte Gleichung der mit $y = ax + b$ parallelen und durch den Punct M' (x', y') gehenden Linie.

15.

Aufgabe. Es sind die Gleichungen zweier graden Linien (1), (2) gegeben, nämlich:

$$y = a\,x + b \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$y = a'x + b' \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Es werden die Coordinaten ihres Durchschnittspuncts M, $(x_, y_,)$ gesucht.



Auflösung. Im Durchschnittspunct M haben beide Linien, für eine gewisse gleiche Abscisse AP $= x_,$ eine gleiche oder gemeinschaftliche Ordinate MP $= y_,$. Es kommt also darauf an, eine solche Abscisse $(x_,)$ zu finden, welche in beiden Gleichungen (1), (2) statt x gesetzt, einerlei y giebt, oder die Ausdrücke $ax_, + b$ und $a'x_, + b'$ gleich macht. Wir setzen deshalb

*) Es versteht sich stillschweigend, dass beide Gleichungen (1), (2) über einerlei Abscissen-Achse und aus demselben Anfangspunct construirt gedacht werden müssen. Es ist nicht üblich, die laufenden Ordinaten beider Linien, obgleich sie für einerlei Abscissen verschieden sind, mit verschiedenen Zeichen, wie etwa y, y, zu bezeichnen.

$$ax_{,}+b=a'x_{,}+b'$$

hieraus folgt die Abscisse des Durchschnittspuncts

$$x_{,}=\frac{b'-b}{a-a'}$$

diesen Werth von $x_{,}$ in (1) substituirt, erhält man auch die Ordinate

$$y_{,}=\frac{ab'-a'b}{a-a'}$$

wodurch die Lage des Durchschnittspuncts vollkommen bestimmt ist.

Anmerkung. Wäre $a'=a$, so wären $x_{,}$ $y_{,}$ unendlich; in diesem Fall wären aber auch die Linien parallel und könnten sich deshalb nicht schneiden.

Seien z. B. gegeben

$$y=2x-3 \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$y=4x-10 \ldots\ldots\ldots (2)$$

wo also:

$$\begin{array}{lll} a=2 & b'=-10 & ab'=-20 \\ a'=4 & b=-3 & a'b=-12 \\ \hline a-a'=-2; & b'-b=-7; & ab'-a'b=-8; \end{array}$$

so ist:

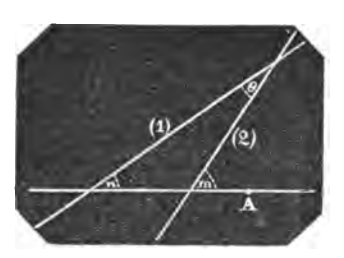
$$x_{,}=3\tfrac{1}{2}$$
$$y_{,}=4.$$

16.

Aufgabe. Es sind die Gleichungen zweier graden Linien (1) und (2) gegeben:

$$y=ax+b \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$y=a'x+b' \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

man sucht die durch a, a' bestimmte trigonometrische tangente des Winkels θ, unter welchem die beiden Linien sich schneiden.



Auflösung. Seien m und n die beiden durch a und a' bestimmten Winkel, welche die Linien (1) und (2) mit der Abscissen-Achse machen, so dass also

$$\operatorname{tg} m=a'$$
$$\operatorname{tg} n=a$$

Ist nun also $a' > a$, also auch $m > n$, so ist:

$$\theta = m - n$$
$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(m - n)$$

und, wenn man tg $(m-n)$ nach der bekannten trigonometrischen Formel entwickelt, nämlich: (Trigonometrie § 100, 14.)

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg} m - \operatorname{tg} n}{1 + \operatorname{tg} m . \operatorname{tg} n}$$

und hierin statt tg$m$ und tg$n$ ihre Werthe a' und a setzt, so kommt die verlangte Formel:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a' - a}{1 + aa'}$$

Anmerkung. Dass der Winkel θ, oder seine Tangente, von den Coefficienten b, b' ganz unabhängig ist, war vorauszusehen, weil diese Coefficienten auf die Neigungen der beiden Linien (1) und (2) keinen Einfluss haben. Man könnte beide, jede parallel mit sich selbst, bis in den Anfangspunct A verschoben denken, und zur Bestimmung des Winkels θ, statt der gegebenen Gleichungen auch diese nehmen:

$$y = ax$$
$$y = a'x$$

17.

Damit sich also zwei grade Linien

$$y = ax + b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$y = a'x + b' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

unter einem bestimmten Winkel θ schneiden, dürfen die Coefficienten a, a' beide nicht beliebig genommen werden, denn nach dem vorhergehenden Satze

$$\frac{a' - a}{1 + aa'} = \operatorname{tg}\theta$$

ist immer der eine Coefficient durch die Grösse des andern bedingt. Soll z. B. a gegeben sein und die beiden Linien einen Winkel $\theta = 45$ mit einander machen, so muss nothwendig, weil $\operatorname{tg} 45^0 = 1$ ist:

$$\frac{a' - a}{1 + aa'} = 1$$

$$\text{also } a' = \frac{1+a}{1-a}$$

sein. Sollen aber (was, wohl zu merken, für die Folge wichtig ist) die beiden Linien senkrecht auf einander stehen, also $\theta = 90^0$, folglich $\operatorname{tg}\theta = \infty$ oder $\cot\theta = 0$ sein, so ist

$$\frac{a'-a}{1+aa'} = \infty\text{ ; oder } \frac{1+aa'}{a'-a} = 0.$$

Aus dem Einen oder Andern folgt:

$$1 + aa' = 0$$

$$a' = -\frac{1}{a}$$

d. h. der eine Coefficient muss für $\theta = 90$ immer das Reciproke des andern sein und mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen werden.

Wäre z. B. für die Linie (1) $a = \frac{3}{4}$, so muss, wenn die Linie (2) auf (1) senkrecht stehen soll, nothwendig $a' = -\frac{4}{3}$ sein.

18.

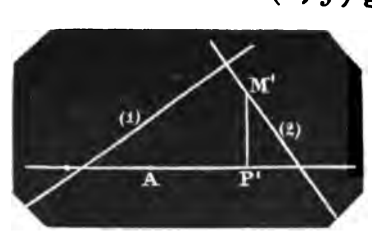
Aufgabe. Es ist die Gleichung einer graden Linie gegeben:

$$y = ax + b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Man sucht die Gleichung einer zweiten Linie

$$y = a'x + b' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

welche auf ersterer senkrecht steht und zugleich durch einen bestimmten Punct M' (x', y') geht.



Auflösung. Zufolge der ersten Bedingung muss $a' = -\frac{1}{a}$ sein, die zu findende Gleichung (2) ist also näher bekannt diese:

$$y = -\frac{1}{a}x + b' \ldots (3)$$

die zweite Bedingung giebt, zur Bestimmung der Grösse b'

$$y' = -\frac{1}{a}x' + b' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Subtrahirt man (4) von (3), so wird b' eliminirt und man hat in üblicher Schreibart:

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x') \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

als die geforderte Gleichung einer graden Linie, welche auf der gegebenen $y = ax + b$ senkrecht steht und zugleich durch den bestimmten Punct (x', y') geht.

Zweites Buch.

Functionen zweier veränderlichen Grössen zweiten Grades oder Linien zweiten Grades.

Kreis, Parabel, Ellipse, Hyperbel (Kegelschnitte).

I. Der Kreis.

19.

Wir haben bereits in der Einleitung (s. VII, 13) zwei verschiedene Gleichungen für einen und denselben Kreis gefunden, nämlich:

$$y^2 = r^2 - x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$y^2 = 2rx - x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

wo bei beiden die Abscissen auf einem beliebigen Durchmesser AB, bei der ersten aber vom Mittelpunct C, und bei der zweiten vom Endpunct A aus gezählt werden.

Ausser diesen beiden, der sogenannten Mittelpuncts- und Scheitelgleichung des Kreises, die wir als bekannt voraussetzen können, müssen wir nun noch eine allgemeine Gleichung desselben, für eine ganz beliebige Abscissen-Achse XX und darin gesetzten Anfangspunct O entwickeln. Wir stellen darüber folgende Aufgabe.

Aufgabe. Es ist die Grösse und Lage eines Kreises, nämlich sein Radius und die Coordinaten seines Mittelpuncts gegeben.

$$MC = r$$
$$OG = a$$
$$CG = b$$

Man sucht die Gleichung des Kreises für diesen Anfangspunct O.

Auflösung. Sei für einen beliebigen Punct M des Kreises:

die Abscisse $OP = x$
die Ordinate $MP = y$

so ist, wenn man den Durchmesser AB mit der Abscissen-Achse XX parallel gezogen denkt:

$$CQ = OP - OG = x - a$$
$$MQ = MP - CG = y - b$$

$MQ^2 + CQ^2 = MC^2$, daher:

$$(y - b)^2 + (x - a)^2 = r^2 \ldots\ldots (3)$$

die verlangte Gleichung des Kreises.

Dass dieser wirklich darin enthalten und umgekehrt wieder daraus abgeleitet werden kann, lässt sich leicht zeigen.

Es folgt aus derselben

$$y = b \pm \sqrt{r^2 - (x - a)^2} \ldots\ldots\ldots (4)$$

Nimmt man hierin: $x = a = OG$

so ist: $y = b \pm r = GC \pm r$

wo das obere Zeichen den Punct D, das untere den Punct E bestimmt.

Nimmt man $x = a + r = OK$
so ist: $y = b = KB$ (Punct B)
Setzt man $x = a - r = OL$
so wird: $y = b = AL$ (Punct A)
Für $x = a + CQ (= OP)$
wird $y = b \pm \sqrt{(r^2 - CQ^2)}$
$= b \pm MQ$

wo das obere Zeichen den Punct M, das untere den Punct *m* giebt.

Für $x = a - CR = OV$
wird $y = b \pm \sqrt{(r^2 - CR^2)}$
$= b \pm NR$

das obere Zeichen giebt den Punct N, das untere den Punct *n*.

Für $x > a + r$
und $x < a - r$
wird y imaginair.

Anmerkung. Man überzeugt sich leicht, dass die Gleichung (3) ganz allgemein ist und auch für die drei andern Lagen des Mittelpuncts C gilt, wenn man nur die Vorzeichen seiner Coordinaten gehörig berücksichtigt.

Läge z. B. der Mittelpunct unterhalb der Abscissen- und rechts der Ordinaten-Achse, so wäre die Ordinate b des Mittelpuncts negativ, und für diesen Fall verwandelt sich die Gleichung (3) in:

$$(y+b)^2 + (x-a)^2 = r^2$$
$$y = -b \pm \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$$

Läge der Mittelpunct unterhalb der Abscissen- und links der Ordinaten-Achse, so wären beide Coordinaten a und b negativ und für diesen Fall die Gleichung des Kreises

$$(y+b)^2 + (x+a)^2 = r^2$$
$$y = -b \pm \sqrt{r^2 - (x+a)^2}$$

Verlegt man den Anfangspunct O nach C, so ist $a = 0$, $b = 0$ und die Gleichung (3) verwandelt sich in die Mittelpunctsgleichung (1). Verlegt man O nach A, so ist $a = r$, $b = 0$, und die allgemeine Gleichung (3) verwandelt sich in die Scheitelgleichung (2).

Wie gross daher in einer Gleichung, welche sich auf die Form $(y-b)^2 + (x-a)^2 = r^2$ bringen lässt, die beständigen Grössen a, b und r auch sein und welches Vorzeichen a und b auch haben mögen, so giebt doch eine solche Gleichung (vorausgesetzt, dass das rechter Hand stehende r^2 positiv ist) über eine beliebige Abscissen-Achse und aus einem beliebig darin gesetzten Anfangspunct construirt, immer einen Kreis, dessen Radius $= \sqrt{r^2} = r$ und dessen Mittelpuncts-Coordinaten a und b sind.

20.

Aus der allgemeinen Gleichung des Kreises

$$(y-b)^2 + (x-a)^2 = r^2 \,\ldots\ldots.\, (1)$$

folgt (durch Auflösung der Klammern etc.)

$$y^2 + x^2 - 2by - 2ax = r^2 - a^2 - b^2 \ldots (2)$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$-2b = B$$
$$-2a = A$$
$$r^2 - a^2 - b^2 = C$$

setzt:

$$y^2 + x^2 + By + Ax = C \ldots\ldots\ldots (3)$$

welche man auch als die allgemeine Gleichung des Kreises betrachten kann. Denn wäre eine bestimmte Gleichung von dieser Form gegeben (in welcher nämlich kein Product aus xy vorkommt und worin die Coefficienten von y^2 und x^2 einander gleich oder $=1$ sind, die übrigen Coefficienten A, B, C mögen sein, was sie wollen), so lässt sich leicht zeigen, dass eine solche Gleichung, durch rechtwinklige Coordinaten construirt, wenn überhaupt eine Linie nothwendig einen Kreis giebt, dessen Grösse und Lage gegen zwei rechtwinklige Coordinaten-Achsen durch die Coefficienten A, B, C vollkommen bestimmt ist.

Denn addiren wir, um diese Gleichung (3) auf die bekannte Form der Gleichung (1) zurückzuführen, auf beiden Seiten $\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2$, so kommt:

$$y^2 + By + \tfrac{1}{4}B^2 + x^2 + Ax + \tfrac{1}{4}A^2 = C + \tfrac{1}{4}A^2 + \tfrac{1}{4}B^2 \ldots (4)$$

Linker Seite stehen nun zwei vollkommene Quadrate und man kann diese Gleichung (4) auch so schreiben:

$$(y + \tfrac{1}{2}B)^2 + (x + \tfrac{1}{2}A)^2 = R^2 \ldots\ldots (5)$$

wo der Kürze wegen

$$C + \tfrac{1}{4}A^2 + \tfrac{1}{4}B^2 = R^2$$

gesetzt ist. Und man sieht nun, dass zufolge § 19 diese aus (3) entsprungene Gleichung (5) die eines Kreises ist,

dessen Radius $= \sqrt{(C + \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2)}$
Abscisse des Mittelpuncts $= -\frac{1}{2}A$
Ordinate des Mittelpuncts $= -\frac{1}{2}B$.

Anmerkung. Wäre C negativ und $= \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2$, so wäre $R = 0$, und folglich der Kreis ein Punct. Wäre C negativ und grösser als $\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2$, so wäre R und folglich auch y unmöglich und die Gleichung liesse sich dann nicht construiren.

Beispiele. Man bestimme die Grösse und Lage der in folgenden drei Gleichungen enthaltenen Kreise (gegen zwei rechtwinklig genommene Achsen):

$$4y^2+4x^2+8y-16x+\ 3=0\ .\ \ldots\ldots(1)$$
$$y^2+\ \ x^2-6y\ \ldots\ldots-16=0\ \ldots\ldots\ldots(2)$$
$$y^2+\ \ x^2+4y-\ \ 2x+\ 8=0\ \ldots\ldots\ldots(3)$$

Auflösung. Aus der ersten Gleichung folgt, indem wir sie erst, um die Coefficienten von y^2 und x^2 auf 1 zu bringen, durch 4 dividiren:

$$y^2+2y+x^2-4x=-\tfrac{3}{4}$$
$$y^2+2y+1+x^2-4x+4=-\tfrac{3}{4}+1+4$$
$$(y+1)^2+(x-2)^2=4\tfrac{1}{4}$$

Es ist also dieses Kreises

Radius $=\sqrt{4\tfrac{1}{4}}$
Mittelpts. Abscisse $=+2$
„ Ordinate $=-1$

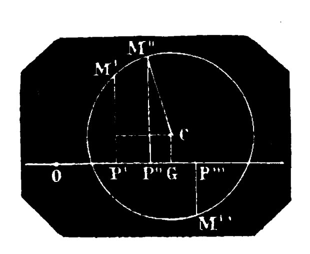
Für die zweite Gleichung ist $A=0$, $B=-6$, $C=16$, folglich dieses Kreises

Radius $=5$
Mittelpts. Abscisse $=0$
„ Ordinate $=+3$

Die dritte Gleichung lässt sich nicht construiren.

21.

Aufgabe. Die Gleichung eines Kreises zu finden, der durch drei beliebige, durch ihre Coordinaten gegebene Puncte $M'(x'y')$, $M''(x''y'')$, $M'''(x'''y''')$ geht.



Auflösung. Die Gleichung hat jedenfalls die Form:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\varrho^2\ \ldots(1)$$

und es kommt nur darauf an, die hierin vorkommenden drei beständigen Grössen, nämlich den Radius $CM''=\varrho$, die Abscisse des Mittelpuncts $OG=\alpha$ und die Ordinate desselben $CG=\beta$ zu bestimmen. Diese Coefficienten α, β, ϱ, müssen nämlich so beschaffen sein, dass die Gleichung (1) für $x=x'$, $y=y'$, für $x=x''$, $y=y''$ und für $x=x'''$, $y=y'''$ giebt; daher folgende drei Bedingungsgleichungen:

$$(y'\ -\beta)^2+(x'\ -\alpha)^2=\varrho^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$(y''\ -\beta)^2+(x''\ -\alpha)^2=\varrho^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$(y'''-\beta)^2+(x'''-\alpha)^2=\varrho^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

woraus die unbekannten beständigen Grössen α, β, ϱ durch einen etwas weitläufigen, aber gewöhnlichen Eliminationsprocess leicht zu finden sind.

Subtrahirt man, um zuerst ϱ zu eliminiren, die zweite Gleichung von der dritten und vierten, so erhält man:

$$(y'-y'').\beta+(x'-x'').\alpha=\tfrac{1}{2}(y'^2-y''^2+x'^2-x''^2)\ldots.(5)$$
$$(y'-y''').\beta+(x'-x''').\alpha=\tfrac{1}{2}(y'^2-y'''^2+x'^2-x'''^2)\ldots.(6)$$

Jetzt die fünfte Gleichung mit $y'-y'''$, die sechste mit $y'-y''$ multiplicirt, und dann von einander subtrahirt, wird β eliminirt, und man erhält:

$$\alpha=\frac{\tfrac{1}{2}(y'-y''')(y'^2-y''^2+x'^2-x''^2)-\tfrac{1}{2}(y'-y'')(y'^2-y'''^2+x'^2-x'''^2)}{(y'-y''')(x'-x'')-(y'-y'')(x'-x''')}=a$$

Die Gleichung (5) mit $x'-x'''$ und (6) mit $x'-x''$ multiplicirt, und dann von einander subtrahirt, kommt auch:

$$\beta=\frac{\tfrac{1}{2}(x'-x''')(y'^2-y''^2+x'^2-x''^2)-\tfrac{1}{2}(x'-x'')(y'^2-y'''^2+x'^2-x'''^2)}{(x'-x''')(y'-y'')-(x'-x'')(y'-y''')}=b$$

Diese für α und β gefundenen Werthe in die Gleichung (2) substituirt, wird auch der Radius

$$\varrho=\sqrt{(y'-b)^2+(x'-a)^2}=r.$$

bekannt. Endlich diese drei für α, β, ϱ gefundenen Werthe, die wir, Kürze halber, mit a, b, r bezeichnet haben, in die allgemeine Form (1) substituirt, kommt:

$$(y-b)^2+(x-a)^2=r^2$$

als die verlangte Gleichung des durch a, b, r der Lage und Grösse nach bestimmten Kreises, der durch die drei gegebenen Puncte (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') geht.

Bemerkung. Die vorhergehenden Rechnungen zeigen, dass man durch drei beliebige Puncte, aber auch nur durch drei, immer einen Kreis führen kann, dessen Grösse und Lage durch die Coordinaten der gegebenen drei Puncte bestimmt ist; denn diese geben drei Gleichungen, durch welche die drei beständigen Grössen α, β, ϱ berechnet werden können.

Wären nur zwei oder ein Punct gegeben, so würden im ersten Falle eine, und im andern Falle zwei dieser beständigen Grössen unbestimmt und willkürlich bleiben, zum Beweise, dass durch ein oder zwei Puncte unzählig viele Kreise möglich sind.

Lägen die gegebenen drei Puncte in grader Linie, wäre z. B. $y' = y'' = y'''$, so wäre α, β, ϱ unendlich.

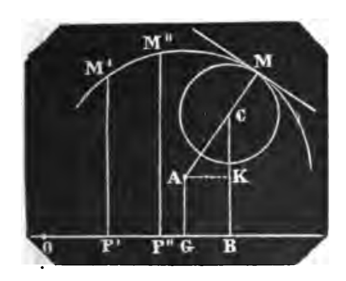
Lägen die drei gegebenen Puncte zufällig so, dass sie von dem Anfangspunct O gleichweit entfernt wären, so fände man $\alpha = 0$, $\beta = 0$ und $\varrho = \sqrt{(x'^2 + y'^2)} = \sqrt{(x''^2 + y''^2)} = \sqrt{(x'''^2 + y'''^2)}$, und erhielte dann die Mittelpunctsgleichung.

22.

Aufgabe. Es sind die Coordinaten zweier Puncte M' (x', y') M'' (x'', y''), so wie die Lage und Grösse eines Kreises, C, gegeben, nämlich die Coordinaten seines Mittelpuncts und sein Radius

$$OB = a$$
$$CB = b$$
$$CM = r$$

Man sucht die Gleichung eines Kreises, der durch die beiden gegebenen Puncte geht, und zugleich den gegebenen Kreis einschliesst und berührt.



Auflösung. Seien α, β die unbekannten Coordinaten des Mittelpuncts A, und ϱ der unbekannte Radius des gesuchten Kreises, nämlich:

$$OG = \alpha$$
$$AG = \beta$$
$$AM = \varrho$$

so ist die Gleichung dieses Kreises

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = \varrho^2$$

Weil beide Kreise im Berührungspunct M eine gemeinschaftliche Berührungslinie haben, und die darauf in M Senkrechte durch beider Mittelpuncte geht, so haben wir die drei Bedingungsgleichungen

$$(y' - \beta)^2 + (x' - \alpha)^2 = \varrho^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1)$$
$$(y'' - \beta)^2 + (x'' - \alpha)^2 = \varrho^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$
$$(b - \beta)^2 + (a - \alpha)^2 = (\varrho - r)^2 \;\ldots\ldots\ldots\; (3)$$

woraus die unbekannten Grössen α, β, ϱ als Functionen der gegebenen x', y', x'', y'', a, b, r zu finden.

Soll der gegebene Kreis C berührt und ausgeschlossen werden, so muss man $(\varrho + r)^2$ statt $(\varrho - r)^2$ setzen

II. Die Parabel.

23.

Erklärung. Seien LL', DX zwei auf einander senkrechte Linien, und in letzterer ein Punct, F, beliebig angenommen. Alsdann ist eine krumme Linie, MAN, von der Beschaffenheit möglich, dass der (senkrechte) Abstand eines jeden ihrer Puncte M, m, A, m' ..... von der Linie LL' gleich ist der Entfernung desselben von dem Puncte F, so nämlich, dass

$$MF = MG$$
$$rF = ra$$
$$mF = mh$$
$$AF = AD$$
$$m'F = m'b$$
$$\vdots \quad \vdots$$

Eine solche krumme Linie heisst eine Parabel.

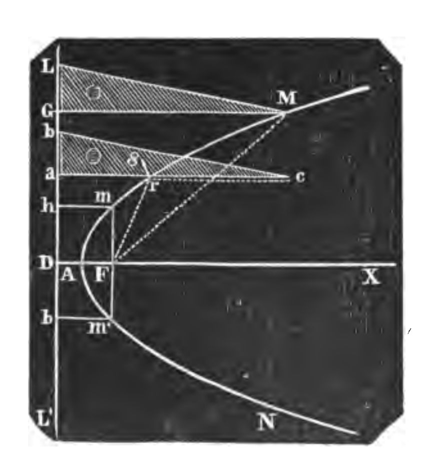
Die Linie AX, welche die Parabel in zwei gleiche Hälften (Aeste, Schenkel) theilt, heisst die Achse, und der Punct A in ihr der Scheitel.

Der feste Punct F in der Achse heisst (aus später zu erwähnenden optischen Gründen) der Brennpunct (Focus).

Jede vom Brennpunct an die Parabel gehende Linie, wie FM, Fm...., heisst Leitstrahl (Radius vector).

Die durch den Brennpunct F gehende, auf der Achse senkrechte Sehne mm' heisst der Parameter der Parabel.

Die Linie LL' endlich heisst Leitlinie.



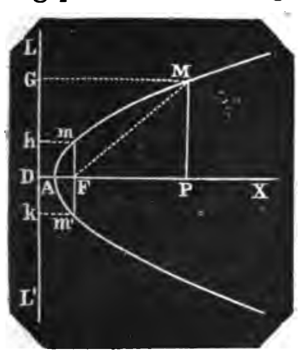
Anmerkung. Man kann sich eine Parabel auf folgende Weise durch stetige Bewegung eines Punctes beschrieben denken:

Ein bei a rechtwinkliges Dreieck (oder Winkelhaken), abc, gleite mit dem einen Schenkel ab, an einer Leitlinie, LL', hin, während zugleich ein unausdehnsamer Faden, von der Länge des andern Schenkels ac, dessen eines Ende in c und dessen anderes Ende in

dem Brennpunct F befestigt ist, mittelst eines an dem Schenkel ac fortgleitenden Zeichnenstiftes, sr, stets straff gespannt wird, alsdann beschreibt der Zeichnenstift offenbar eine Parabel. Denn we ildie Länge des ganzen Fadens gleich dem Schenkel ac ist, nämlich $ar + rc = Fr + rc = ac$, so bleibt auch, wenn man von beiden das Stück rc des Fadens, welches sich an den Schenkel ac angelegt hat, abzieht, $ar = Fr$, d. h. der beim Fortschieben des Dreiecks abc an der Seite ac fortgleitende Stift sr bleibt immer in gleicher Entfernung vom Brennpunct F und der Leitlinie LL'. Um den unteren Zweig zu beschreiben, muss man das Dreieck abc umlegen.

24.

Aufgabe. Aus dem erklärten Begriff und dem gegebenen Parameter einer Parabel die Gleichung derselben abzuleiten, wenn die Achse zur Abscissen-Linie, und der Scheitel zum Anfangspunct (rechtwinkliger Coordinaten) genommen wird.



Auflösung. Setzen wir den gegebenen Parameter $mm' = p$, die Ordinate $MP = y$ und die Abscisse $AP = x$, so folgt, weil nach dem Begriffe der Parabel sowohl die Leitlinie, als der Brennpunct um $\frac{1}{4}$ des Parameters vom Scheitel A (Anfangspunct) entfernt sind ($AF = AD = \frac{1}{4}p$), dass für jeden Punct M:

$$FM = DP = AP + \tfrac{1}{4}p = x + \tfrac{1}{4}p$$
$$FP = AP - \tfrac{1}{4}p = x - \tfrac{1}{4}p$$

und folglich auch, weil immer

$$\overline{MP}^2 + \overline{FP}^2 = \overline{FM}^2$$
$$y^2 + (x - \tfrac{1}{4}p))^2 = (x + \tfrac{1}{4}p)^2$$

und hieraus die fragliche höchst einfache Gleichung der Parabel:

$$y = \sqrt{px}$$

welche, wegen des doppelten Vorzeichens der Quadratwurzel, zugleich auch den unteren Ast giebt.

25.

Aufgabe. Die räumliche Bedeutung der Gleichung $y^2 = ax$ (deren Ursprung wir jetzt nicht wissen, sondern als willkürlich

aufgeworfen annehmen wollen) zu erklären, d. h. die Gestalt und Merkmale der aus einer Gleichung von der Form

$$y^2 = ax$$

entspringenden Linie, die zur Unterscheidung von andern Arten Linien Parabel heissen soll, anzugeben.

Auflösung. Aus der gegebenen Gleichung folgt:

$$y = \sqrt{ax}$$

Nehmen wir nun eine Linie, AX, als Abscissen-Achse, und darin A als Anfangspunct, so ist:

1) Für $x = 0$ auch $y = 0$. Unsere Linie, Parabel genannt, geht also durch den Anfangspunct.

2) Für negative Abscissen wird y imaginär. Für jede positive Abscisse aber giebt die Gleichung immer zwei gleiche entgegengesetzte Ordinaten, die mit den Abscissen wachsen, und mit diesen unendlich werden, denn für $x = \infty$ wird auch $y = \pm \infty$. Die krumme Linie geht also von A aus mit zwei gleichen Zweigen zu beiden Seiten der positiven Abscissen-Linie ins Unendliche fort, und kann, ausser im Anfangspunct, die Abscissen-Achse nicht schneiden.

Anmerkung. Wäre a negativ, so gäbe die Gleichung nur für negative Abscissen reelle Ordinaten, und man bekäme dann dieselbe Parabel in entgegengesetzter Lage.

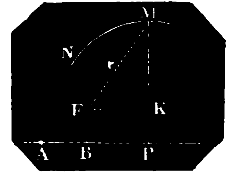
26.

Die Construction der Parabel durch Berechnung der zu beliebig angenommenen Abscissen gehörenden Ordinaten ist wegen der jedesmal erforderlichen Wurzel-Ausziehung sehr beschwerlich. Wir wollen deshalb hier einen zuerst von *Euler* gezeigten (auch auf andere krumme Linien anwendbaren) Kunstgriff mittheilen, durch welchen man die zur Bestimmung der Ordinaten erforderlichen Wurzel-Ausziehungen umgehen und die Parabel viel leichter construiren kann.

Dieser höchst einfache Kunstgriff ergiebt sich aus folgenden Betrachtungen:

Sei y irgend eine irrationale Function von x, in Zeichen: $y = \varphi(x)$, und MN ein Theil der daraus hervorgehenden krummen Linie, so dass für $AP = x$, $MP = y$ ist.

Nimmt man nun in der Ebene dieser Linie einen ganz beliebigen, aber durch seine Coordinaten $AB = \alpha$, $FB = \beta$ bestimmten Punct, F, an, so ist auch die Entfernung dieses Puncts F



von einem Punct, M, der krummen Linie durch die Coordinaten x, y desselben, also auch (weil y durch x gegeben) durch die Abscisse x des Punctes M vollkommen bestimmt. Wir haben nämlich, die Entfernung $FM = r$ gesetzt, unmittelbar aus der Figur, oder nach § 10:

$$r^2 = (y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2$$

oder auch für y seinen Werth $\varphi(x)$ gesetzt:

$$r^2 = (\varphi x - \beta)^2 + (x - \alpha)^2$$
$$r^2 = (\varphi x)^2 - 2\beta . \varphi(x) + \beta^2 + x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$$

Lässt sich nun durch eine schickliche Wahl der in unserm Belieben stehenden Coordinaten α, β die Lage des Puncts F so bestimmen, dass der Ausdruck rechter Hand ein vollkommenes Quadrat, also die Wurzel daraus rational wird, so soll ein solcher Punct, F, Brennpunct (Focus), und jede von ihm an die krumme Linie gezogene Grade, wie $FM = r$, Leitstrahl (Radius vector) heissen.

Es ist klar, dass in diesem Fall der zu einer gegebenen Abscisse $AP = x$ gehörende Radius vector $FM = r$ leichter, als die Ordinate $MP = y$ zu berechnen, und durch ihn ebenfalls die Lage des Puncts M bestimmt ist. Man braucht nämlich nur aus F mit dem durch $AP = x$ bestimmten Radius vector einen Kreisbogen zu beschreiben, welcher von dem in P errichteten Perpendikel die Ordinate $MP = y$ abschneidet.

27.

Wenden wir nun die eben erklärte Theorie auf die Parabel an, um zu entdecken, ob dieselbe einen Brennpunct habe. Nennen wir, im Fall ein solcher existirt, α und β die noch unbekannten Coordinaten desselben, so ist für dessen Entfernung r von einem Punct, M (x, y) der Parabel

$$r^2 = (y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2$$

oder weil für die Parabel hierin

$$y^2 = ax$$
$$y = \sqrt{ax}$$

so ist

$$r^2 = ax - 2\beta . \sqrt{ax} + \beta^2 + x^2 - 2\alpha x + \alpha^2.$$

Soll nun r eine rationale Function von x sein, so muss es

um so mehr auch r^2 sein, und deshalb nothwendig zuerst von dem irrationalen Gliede $2\mathfrak{C}.\sqrt{ax}$ befreit werden. Dies geht aber nicht anders, als indem man $\mathfrak{C}=0$ nimmt. Folglich muss, wenn ein Brennpunct möglich ist, dessen Ordinate $\mathfrak{C}=0$ sein, und mithin sein Ort in der Achse gesucht werden. Es kommt also darauf an, ob sich die Grösse α, über welche wir noch zu verfügen haben, so bestimmen lässt, dass jetzt (weil $\mathfrak{C}=0$):

$$x^2+(a-2\alpha)x+\alpha^2$$

ein vollkommenes Quadrat wird. Dies wird es, wenn man α so nimmt, dass (siehe Algebra § 214):

$$2\alpha=a-2\alpha$$

$$\text{folglich } \alpha=\tfrac{1}{4}a$$

für diese Annahme von α ist dann:

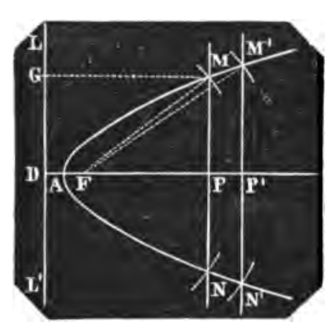
$$r^2=x^2+\tfrac{1}{2}ax+\frac{a^2}{16}$$

$$\text{mithin } r=x+\tfrac{1}{4}a$$

Nehmen wir also in unserer Parabel

$$\text{AF}=\tfrac{1}{4}a^{*})$$

so ist F der fragliche Brennpunct derselben, und folglich für $\text{AP}=x$, $\text{FM}=r=x+\frac{1}{4}a$; für $\text{AP}'=x'$, $\text{FM}'=r'=x'+\frac{1}{4}a$ etc.



Um nun durch Hülfe des Brenn puncts F die Parabel leichter zu construiren verlängere man die Achse rückwärts um $\text{AD}=\frac{1}{4}a$, errichte in beliebigen Puncten, P, P'.., die Perpendikel MN, M'N'.... und schneide diese aus F, mit den Leitstrahlen DP, DP'.. in M, N, M'N'.., so sind dieses Puncte in der Parabel, deren man auf diese Weise leicht noch mehrere bestimmen und durch einen freien Handzug mit einander verbinden kann.

Errichtet man in D eine Senkrechte, LL', so ist, als eine merkwürdige Eigenschaft der Parabel, jeder Punct, M, N, M'...., derselben von dieser Senkrechten und vom Brennpunct gleich weit entfernt, denn $\text{MG}=\text{DP}=\text{MF}$.

---

*) Die beständigen Grössen (wie hier a) bedeuten keine Linien, sondern bestimmte Zahlen, welche jedoch eben so, wie die veränderlichen Grössen, durch Linien dargestellt werden können, wie hier a durch den Parameter.

Die durch den Brennpunct F gehende, auf der Achse senkrechte Sehne mm' heisst der Parameter der Parabel. Seine halbe Länge mF folgt aus der Gleichung der Parabel, wenn man der veränderlichen Abscisse x den Werth AF $= \frac{1}{4}a$ beilegt, für diesen Werth von $x = \frac{1}{4}a$ giebt die Gleichung $y = \sqrt{ax}$

$$mF = \sqrt{a \cdot \tfrac{a}{4}} = \tfrac{1}{2}a$$

folglich ist der ganze Parameter $mm' = a =$ dem beständigen Coefficienten von x, und man sieht, dass durch diesen Coefficienten, oder den Parameter, die Parabel vollkommen bestimmt ist. Je grösser derselbe, je weiter ist der Brennpunct vom Scheitel entfernt, und umgekehrt.

Aus der Gleichung der Parabel $y^2 = ax$ folgt noch:

$$a : y = y : x$$

in Worten: die Ordinate eines beliebigen Punctes, M, der Parabel ist immer die mittlere Proportionale zwischen der zugehörigen Abscisse und dem Parameter.*)

28.

Die Theorie der drei krummen Linien: Parabel, Ellipse, Hyperbel, ist, ausser in der Mechanik und Naturwissenschaft, namentlich auch in der Astronomie deshalb von grosser Wichtigkeit, weil, wie zuerst *Newton* gezeigt hat, vermöge einer Naturnothwendigkeit (der allgemeinen Gravitation) die Planeten und Cometen sich (momentan) nur in einer von diesen drei Linien, und in keiner andern bewegen können.

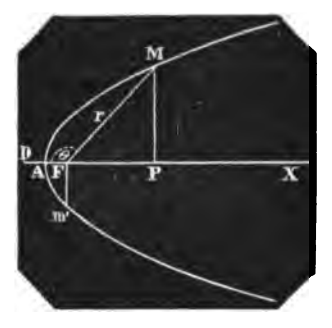
Um nun den Lauf der himmlischen Körper leichter verfolgen, und ihren Ort am Himmel für eine beliebige, verflossene oder zukünftige Zeit bestimmen zu können, ist es bequemer, diese Linien, statt durch rechtwinklige, durch Polar-Coordinaten auszudrücken. — Aus diesem Grunde noch folgende Aufgabe über die Parabel.

29.

Aufgabe. Die Polargleichung der Parabel zu finden, wenn der Brennpunct F als Pol, der Anfangspunct der Winkeldrehung im Scheitel A angenommen wird.

Auflösung. Sei der Radius vector FM $= r$, der Polarwinkel AFM $= \theta$, und der Parameter der Parabel $= p$, so ist offenbar

*) Andere merkwürdigere Eigenschaften der Parabel kommen im dritten Buche vor.



durch diesen, die Parabel bestimmen den beständigen Parameter p, und durch eine beliebige Grösse des veränderlichen Winkels θ die Länge des zugehörigen Rad. vect. r, mithin die Lage des Punctes M bestimmt, und die Gleichung zwischen r, θ, p muss sich aus der bekannten Eigenschaft der Parabel ableiten lassen. Es ist nämlich (§ 27)

$$AF = \tfrac{1}{4}p = AD$$
$$FM = r = DF + FP = \tfrac{1}{2}p + FP$$

nun aber $FP = FM.\cos(180 - \theta) = -r\cos\theta$

also $r = \tfrac{1}{2}p - r\cos\theta$

und hieraus die fragliche Polargleichung

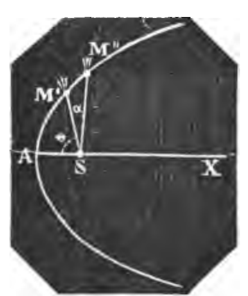
$$r = \frac{\tfrac{1}{2}p}{1 + \cos\theta}$$

Setzen wir hiern zur Probe $\theta = 0$, so ist $r = \tfrac{1}{4}p = FA$; für $\theta = 90$, ist $r = \tfrac{1}{2}p = Fm$; für $\theta = 120^0$, ist $r = p$; für $\theta = 180^0$, ist $r = \frac{\frac{1}{2}p}{0} = \infty$; für $\theta = 270^0$, ist $r = \tfrac{1}{2}p = Fm'$; für $\theta = 360^0$, ist $r = \tfrac{1}{4}p = FA$.

Den untern Zweig der Parabel erhält man aber auch, wenn man sich in entgegengesetzter Richtung dreht, also θ negativ nimmt, so ist z. B. für $\theta = -90^0$, $r = \tfrac{1}{2}p$ etc. (Trigon. § 57.)

30.

*) **Aufgabe.** Die Bahn eines Cometen sei eine Parabel, und zwei (durch Beobachtungen und Rechnung bestimmte) Entfernungen desselben von der Sonne, d. i. zwei vom Pol S zu ihm führende Leitstrahlen $M'S = r'$, $M''S = r''$, so wie der Winkel α, den sie einschliessen, gegeben, z. B. $r' = \tfrac{1}{3}$, $r'' = \tfrac{1}{2}$, $\alpha = 30^0$. Man sucht den Ort des Perihels A, d. h. den Parameter p und die Lage der Achse oder den Winkel $ASM' = \theta$.



Auflösung. Die Polargleichung der Parabel kann jedenfalls auf folgende Form gebracht werden:

$$r = \frac{\tfrac{1}{2}p}{1 + \cos\theta}$$

Zur Bestimmung der gesuchten Grössen p und θ haben wir folgende zwei Bedingungsgleichungen:

$$r' = \frac{\frac{1}{2}p}{1+\cos\theta} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$r'' = \frac{\frac{1}{2}p}{1+\cos(\theta+\alpha)} \ldots\ldots\ldots (2)$$

Hieraus folgt nun:

$$\frac{r'}{r''} = \frac{1+\cos(\theta+\alpha)}{1+\cos\theta} = \frac{2.\cos^2\frac{1}{2}(\theta+\alpha)}{2.\cos^2\frac{1}{2}\theta} \text{ (Trig. § 100, 22)}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\theta+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}\theta} = \pm\sqrt{\frac{r'}{r''}}$$

Beide Seiten dieser Gleichung von 1 subtrahirt und zu 1 addirt, dann dividirt, kommt:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\theta - \cos\frac{1}{2}(\theta+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}\theta + \cos\frac{1}{2}(\theta+\alpha)} = \frac{1\mp\sqrt{\frac{r'}{r''}}}{1\pm\sqrt{\frac{r'}{r''}}}$$

Nach bekannten goniometrischen Formeln lässt sich die Differenz sowohl, als die Summe zweier Cosinus in ein Product verwandeln, thut man dies, und setzt zugleich $\sqrt{\frac{r'}{r''}} = \operatorname{tg} m$, so erhält man (Trigon. § 100, 32 und 24):

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(\theta+\frac{1}{2}\alpha).\sin\frac{1}{4}\alpha}{2\cos\frac{1}{2}(\theta+\frac{1}{2}\alpha).\cos\frac{1}{4}\alpha} = \frac{1\mp\operatorname{tg} m}{1\pm\operatorname{tg} m}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\theta+\tfrac{\alpha}{2}) = \frac{\operatorname{tg}(45\mp m)}{\operatorname{tg}\frac{1}{4}\alpha.} \ldots\ldots (3)$$

Aus dieser Gleichung findet man θ, und dann aus (1)

$$p = 4r'\cos^2\tfrac{1}{2}\theta \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Für θ sowohl, als für p findet man natürlich zwei Werthe, weil in der Aufgabe nicht angegeben, ob die beiden Leitstrahlen an einerlei, oder an verschiedenen Seiten der Achse liegen. Man findet nämlich:

$\theta = 60^0$, $p = 1$, wenn r', r'' an einerlei Seite,
$\theta = 163^0\ 29'$, $p = 0{,}02753$, wenn zu beiden Seiten der Achse.

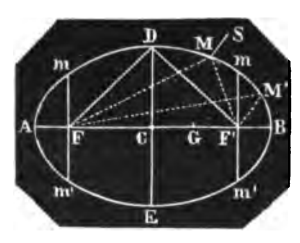
III. Die Ellipse.

31.

Erklärung. Eine krumme Linie von der Beschaffenheit, dass die Summe der beiden Abstände eines jeden ihrer Puncte, M,

M'... , von zwei andern festen Puncten, F, F', immer dieselbe ist: FM + F'M = FM' + F'M', heisst eine **Ellipse**.

Man kann sich eine solche Linie durch die stetige Bewegung eines Puncts beschrieben denken, indem man sich vorstellt, ein mit seinen beiden Enden in F und F' befestigter (oder auch um beide Puncte gelegter endloser) Faden (ohne Dicke) werde mittelst eines Zeichnenstiftes, SM, (ohne Dicke) gespannt, und dann dieser Stift, den Faden stets spannend, um die beiden festen Puncte F, F' ganz herum geführt. Alsdann ist augenscheinlich die Summe der beiden Abstände eines jeden Puncts, M, M'...., von F und F' immer dieselbe, nämlich gleich der Länge des ganzen Fadens.



Die beiden festen Puncte F, F' heissen (aus optischen Gründen) die **Brennpuncte**, und jede von ihnen bis an die Ellipse gehende grade Linie, wie FM, FM', F'M..., **Leitstrahl** (**Rad. vect.**)

Die durch die **Brennpuncte** gehende Linie AB heisst die **grosse**, und die in ihrer Mitte C darauf senkrechte DE die **kleine Achse**.

Die Puncte A und B heissen **Scheitel**, und C der **Mittelpunct** der Ellipse.

Die durch einen der Brennpuncte gehende, auf der grossen Achse senkrechte Sehne mm' heisst **Parameter**.

Die Entfernung eines der Brennpuncte vom Mittelpunct C, nämlich: CF = CF', heisst die **Excentricität** der Ellipse.

32.

Aus dem Begriffe oder Merkmal der Ellipse folgt:

1) dass die für alle Puncte D, M, M', B.... **gleiche** Summe je zweier dahin führenden Leitstrahlen (Abstände von den Brennpuncten F, F') nothwendig gleich der grossen Achse sein muss. Denn B ist von F um BF = FF' + BF', und von F' um BF' entfernt, also die Summe der beiden Abstände = FF' + BF' + BF', oder weil, wie leicht einzusehen, BF' = AF, so ist auch FF' + BF' + BF' = FF' + BF' + AF = AB

2) dass ein Endpunct, D, der kleinen Achse um die halbe grosse Achse von den Brennpuncten entfernt ist, denn weil, wie eben bewiesen, FD + F'D = AB, und C die Mitte von AB ist, so ist auch FD = F'D = $\frac{1}{2}$AB.

Setzen wir also:

die **halbe** grosse Achse AC $= a$
die **halbe** kleine Achse CD $= b$
die Excentricität CF $= e$

so folgt aus dem rechtwinkligen Dreiecke FCD:

$$b^2 = a^2 - e^2$$
$$e^2 = a^2 - b^2$$

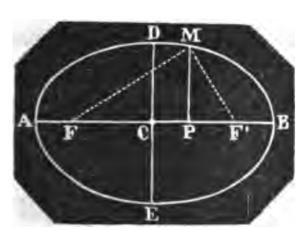
3) Durch die grosse Achse und Excentricität ist folglich die kleine Achse, und umgekehrt, durch die grosse und kleine Achse die Excentricität, und in beiden Fällen die Ellipse selbst bestimmt

4) Leicht ist es nun, eine Ellipse durch Puncte zu construiren, wenn ihre grosse Achse AB und die Excentricität CF = CF gegeben sind. Man beschreibe nämlich mit einem beliebigen Theil, AG, der grossen Achse aus dem einen, und mit dem Rest, GB, aus dem andern Brennpunct einen Bogen, so ist der Durchschnittspunct M beider Bögen um die Summe AG + GB = AB von den beiden Brennpuncten entfernt, und folglich ein Punct in der Ellipse. Auf gleiche Weise kann man mit je zwei andern Theilen der grossen Achse verfahren, und dann die so bestimmten Puncte der Ellipse durch einen Zug aus freier Hand mit einander verbinden.

5) Um nach der gegebenen grossen und kleinen Achse die Ellipse zu construiren, muss man erst die Excentricität $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ bestimmen. Man errichte deshalb auf der Mitte C der grossen Achse ein Perpendikel, CD, = der halben kleinen Achse, beschreibe aus D, mit der halben grossen Achse, einen Bogen, welcher die grosse Achse in den beiden Brennpuncten F, F′ schneidet.

33.

Aufgabe. Aus der gegebenen grossen und kleinen Achse einer Ellipse die Gleichung derselben zu finden, wenn die Abscissen auf der grossen Achse vom Mittelpunct C aus gerechnet werden.



Auflösung. Setzen wir die
grosse Achse AB $= 2a$
kleine Achse DE $= 2b$
Excentricität CF $= e$
Abscisse CP $= x$
Ordinate MP $= y$

so geben uns die beiden rechtwinkligen Dreiecke FMP und F′MP, in wel-

chen $FP=e+x$, $F'P=e-x$, und $FM+F'M=2a$ ist (vergl. die § 38 geführte ähnliche Rechnung):

$$FM=\sqrt{y^2+(e+x)^2}$$

$$F'M=\sqrt{y^2+(e-x)^2}$$

$$\sqrt{y^2+(e+x)^2}+\sqrt{y^2+(e-x)^2}=2a$$

$$\sqrt{y^2+(e-x)^2}=2a-\sqrt{y^2+(e+x)^2} \text{ (Algebra § 230)}$$

$$y^2+e^2-2ex+x^2=4a^2+y^2+e^2+2ex+x^2-4a\sqrt{y^2+(e+x)^2}$$

$$a\sqrt{y^2+(e+x)^2}=a^2+ex$$

$$a^2y^2+a^2e^2+2a^2ex+a^2x^2=a^4+2a^2ex+e^2x^2$$

$$a^2y^2+(a^2-e^2)\,x^2=a^2\,(a^2-e^2)$$

Nun ist (§ 32) $a^2-e^2=b^2$, und folglich die verlangte so genannte Mittelpuncts-Gleichung der Ellipse:

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

34.

Aufgabe. Die räumliche Bedeutung einer Gleichung zweiten Grades von der Form

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

deren Ursprung wir nicht kennen wollen, zu erklären, nämlich die daraus entspringende krumme Linie, die, zur Unterscheidung von Linien anderer Arten, Ellipse heissen soll, darzustellen.

Auflösung. Aus der vorgegebenen Gleichung folgt:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \dots (2)$$

Wir ziehen nun zwei auf einander senkrechte Achsen, und nehmen deren Durchschnittspunct C zum Anfangspunct.

Für $x=0$ giebt die Gleichung $y=\pm b$; machen wir also $CD=b$, $CE=-b$, so sind D und E die Puncte, in welchen die Ellipse die Ordinaten-Achse schneidet.

Für $y=0$ ist $x=\pm a$; nehmen wir also $CB=+a$, $CA=-a$, so sind A und B die Puncte, in welchen die Abscissen-Achse geschnitten wird.

Für $x>\mp a$ wird y imaginär.

Für jedes $x < \pm a$ giebt es immer zwei gleiche entgegengesetzte Ordinaten.

Für gleich grosse entgegengesetzte Abscissen giebt es gleiche Ordinaten.

Uud folglich ist unsere Linie, Ellipse genannt, eine in sich zurücklaufende, begrenzte, und wird von jeder der beiden Linien $AB = 2a$ und $DE = 2b$ in zwei sich deckende Hälften getheilt.

Ist $a > b$, so soll AB die grosse, und DE die kleine Achse der Ellipse heissen; umgekehrt, wenn $b > a$ ist.

35.

*) **Aufgabe.** Zu untersuchen, ob die Ellipse einen Brennpunct, nämlich einen solchen Punct habe, dass die von ihm nach beliebigen Puncten der Ellipse gehenden Leitstrahlen rationale Functionen von den Abscissen dieser Puncte sind.

Auflösung. Seien, wenn ein solcher Punct möglich ist, α, β die zu bestimmenden Coordinaten desselben, und r der von ihm nach einem beliebigen Punct, M (x, y), der Ellipse gehende Leitstrahl, so ist (§ 26)

$$r^2 = (y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2$$

Setzen wir hierin, um r durch die veränderliche Abscisse x allein auszudrücken, statt y den gleichgeltenden Werth $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ aus (2) (§ 34), so ist:

$$r^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) - 2\beta . \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} + \beta^2 + x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$$

Damit nun r, folglich um so mehr auch r^2, eine rationale Function von x werde, muss der fragliche Brennpunct eine solche Lage haben, dass aus der vorstehenden Gleichung das irrationale Glied herausfällt, also jedenfalls in der Achse AB liegen, mithin die Ordinate desselben $\beta = 0$ sein (indem a und b bestimmte Grössen sind). Für einen etwaigen Brennpunct muss also

$$r^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$$

$$\text{oder } r^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} . x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + b^2) \ldots\ldots (2)$$

und rechter Hand ein vollkommenes Quadrat sein, und folglich α so genommen werden, dass (Algebra § 214)

$$2 \cdot \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \cdot \sqrt{\alpha^2 + b^2} = 2\,\alpha$$

hieraus: $\alpha = \sqrt{(a^2 - b^2)} = \pm e$

Ist nun $a > b$, also der Werth von α, den wir mit e bezeichnet haben, eine reelle Grösse, so zeigt das doppelte Vorzeichen derselben, dass die Ellipse zwei Brennpuncte, F, F', hat, welche beide in der grossen Achse AB, der eine rechts, der andere links, um $\sqrt{(a^2 - b^2)} = \pm e$ von C entfernt liegen. Diese Grösse $e =$ CF $=$ CF', heisst die Excentricität der Ellipse, und man kann sie leicht durch Construction finden. Beschreibt man nämlich mit der halben grossen Achse $= a$ aus dem Endpunct D der kleinen einen Bogen, so schneidet dieser die grosse Achse in zwei Puncten, F, F', welche, weil CF $=$ CF' $= \sqrt{a^2 - b^2}$, die gesuchten Brennpuncte sind.

Substituiren wir den mit $\pm e$ bezeichneten Werth von α in (2), so kommt, weil $e^2 = a^2 - b^2$, und folglich $\alpha^2 + b^2 = a^2$,

$$r^2 = \frac{e^2}{a^2} x^2 \pm 2ex + a^2$$

$$r = a \pm \frac{ex}{a}$$

wo die beiden Theile der Wurzel deshalb verwechselt sind, weil r wesentlich positiv, und $a > \frac{ex}{a}$ ist.

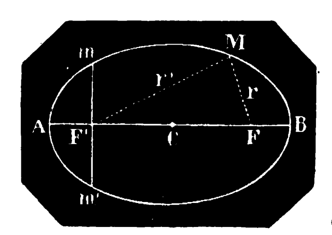
Die beiden nach einem Punct, M (x, y), führenden Leitstrahlen r' und r sind also:

$$r' = a + \frac{ex}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$r = a - \frac{ex}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Aus der Addition dieser beiden Gleichungen folgt, als eine merkwürdige Eigenschaft der Ellipse, dass für jeden Punct M (x, y)

$$r + r' = 2a,$$



in Worten: die Summe der Abstände eines jeden Puncts der Ellipse von den Brennpuncten ist immer gleich der grossen Achse.

Anmerkung 1. Wäre in der Gleichung von der Form

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

$b > a$, so wäre sie dennoch die Gleichung einer Ellipse, in welcher dann aber $2a$ die kleine, und $2b$ die grosse Achse ist, in welcher die Brennpuncte liegen. In diesem Fall betrachte man x als die abhängig veränderliche Grösse, und es ist dann:

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

Anmerkung 2. Auch ist leicht einzusehen, dass jede Gleichung von der Form

$$Ay^2 + Bx^2 = C$$

durch rechtwinklige Coordinaten construirt, eine Ellipse giebt, deren eine halbe Achse $= \sqrt{\frac{C}{B}}$ und die andere $= \sqrt{\frac{C}{A}}$. Denn multiplicirt man die Gleichung mit $\frac{C}{A.B}$, so ist:

$$\frac{C}{B} . y^2 + \frac{C}{A} x^2 = \frac{C}{A} . \frac{C}{B}$$

und wenn man $\frac{C}{B} = \alpha^2$ und $\frac{C}{A} = \beta^2$ setzt:

$$\alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 = \alpha^2 \beta^2.$$

36.

Aufgabe. Seien die grosse und kleine Achse einer Ellipse $2a$ und $2b$ gegeben. Es soll die hiedurch bestimmte, durch einen der Brennpuncte, F′, gehende, auf der grossen Achse senkrechte Sehne, $mm' = p$, welche man den Parameter der Ellipse nennt, gefunden werden.

Auflösung. Die Gleichung der Ellipse ist:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

und diese giebt die Ordinate $Fm = \frac{1}{2}p$, wenn man darin die Abscisse $x = CF = \sqrt{a^2 - b^2} = e$ nimmt; für diesen Werth von x ist:

$$\frac{1}{2}p = \frac{b^2}{a}$$

hieraus folgt: $\frac{1}{2}p : b = b : a$, also auch:

$$p : 2b = 2b : 2a$$

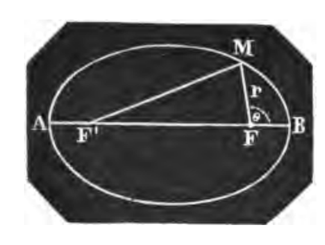
in Worten: in jeder Ellipse ist die kleine Achse die mittlere Proportionale zwischen der grossen Achse und dem Parameter.

37.

Aufgabe. Aus der gegebenen grossen Achse $AB = 2a$ und der Excentricität $CF = e$, die Polargleichung der Ellipse zu finden, wenn der Pol im Brennpunct F, und der Anfangspunct der Winkeldrehung im Scheitel B angenommen wird.

Auflösung. Sei der Polarwinkel $MFB = \theta$, der durch a, e, θ bestimmte Radius vector $FM = r$, so ist, wenn man den andern Radius vector $F'M$ vorläufig mit r' bezeichnet, in dem Dreiecke $F'MF$, in welchem $F'F = 2e$ nach einem bekannten trigonometrischen Satze

$$\cos(180 - \theta) = \frac{4e^2 + r^2 - r'^2}{4er} \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$



Nun ist aber $\cos(180 - \theta) = -\cos\theta$; $r' + r = 2a$; also $r'^2 = (2a - r)^2$. Dies in (1) substituirt, kommt

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a + e\cos\theta} \dots\dots (2)$$

In der Anwendung dieser Gleichung auf Astronomie, giebt man ihr eine etwas andere Form. Man nennt nämlich in der Astronomie nicht die Linie $CF = e$, sondern ihr Verhältniss zur halben grossen Achse $AC = a$, d. h. den Quotienten $\frac{e}{a}$, die (numerische) Excentricität. Bezeichnen wir diese mit ε, so dass $\frac{e}{a} = \varepsilon$ und $e^2 = a^2\varepsilon^2$, so wird, nach Einführung dieses Quotienten, die Gleichung (2)

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\theta} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Aus der Gleichung (2) folgt: $r = \dfrac{b^2}{a + e\cos\theta} = \dfrac{\frac{b^2}{a}}{1 + \varepsilon\cos\theta}$,

mithin ist auch, wenn wir den Parameter einführen (§ 36)

$$r = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \varepsilon\cos\theta} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$



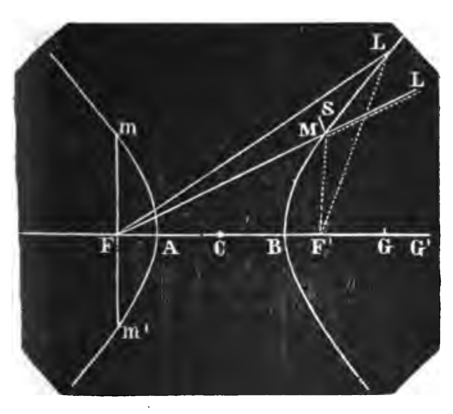
IV. Die Hyperbel.

38.

Erklärung. Eine krumme Linie von der Beschaffenheit, dass die Differenz der Abstände eines jeden ihrer Puncte, M, L, B.. von zwei festen Puncten, F, F′, immer dieselbe ist, nämlich:

$$MF - MF' = LF - LF' = BF - BF'$$

heisst eine Hyperbel.



Man kann sich die Hyperbel auf mechanische Weise beschrieben denken, indem man sich vorstellt: ein Lineal, FL, drehe sich um den einen festen Punct, F, während zugleich ein Faden, F′L, kürzer als das Lineal, dessen eines Ende in L, das andere in F′ befestigt ist, mittelst eines Stifts, sM, stets straff daran gehalten wird. Alsdann beschreibt der, an dem sich drehenden Lineal fortgleitende Stift eine krumme Linie von der angegebenen Beschaffenheit. Denn ist der zeichnende Stift bis M gekommen, so hat sich ein Theil, ML, des Fadens an das Lineal gelegt, und es ist dann:

$$FM - F'M = FM + ML - (F'M + ML) = FL - F'L$$

Ebenso zeigt man, dass für jeden andern Punct die Differenz seiner Abstände von F und F′ immer $= FL - F'L$, also gleich der Länge des Lineals, weniger der Länge des Fadens ist.

Dieselbe Construction, die nach der einen Seite hin Statt findet, findet auch auf der andern Seite Statt.

Die Hyperbel besteht also aus zwei gleichen, nicht zusammenhängenden Zweigen, die man auch wohl entgegengesetzte Hyperbeln nennt.

Die beiden festen Puncte F und F′ heissen Brennpuncte.

Die Linie AB, welche verlängert durch die Brennpuncte geht, heisst die (Haupt-) Achse, ihre Endpuncte A, B die Scheitel, und ihre Mitte, C der Mittelpunct der Hyperbel.

Die Entfernung der Brennpuncte vom Mittelpunct CF = CF' heisst die Excentricität.

Die durch einen der Brennpuncte auf FF' senkrechte Sehne, wie mm', heisst der Parameter der Hyperbel.

Die von den Brennpuncten F, F' nach einem Punct, M, der Hyperbel gehenden Graden, FM, F'M, heissen Leitstrahlen.

Es folgt aus dem Begriff der Hyperbel, dass die beständige Differenz je zweier Leitstrahlen (Unterschied der Abstände eines Punctes von den beiden Brennpuncten) gleich der Achse ist, nämlich: FL — F'L = FM — F'M = FB — F'B = AB, denn:

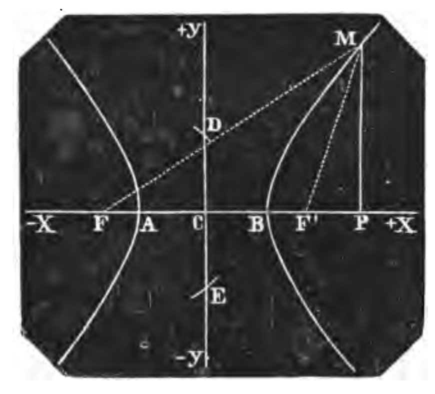
$$FB - F'B = FA + AB - F'B = AB.$$

Es muss also auch, wenn die Construction möglich sein soll, die Achse kleiner als die doppelte Excentricität sein, $AB < FF'$.

Es ergiebt sich leicht, wie man beliebig viele Puncte einer Hyperbel durch Construction findet. Beschreibt man nämlich aus den Brennpuncten F, F' mit je zwei um die Achse AB verschiedenen Leitstrahlen AG, BG, dann mit AG', BG' etc. wechselsweise Bögen, so bestimmt der Durchschnittspunct je zwei derselben, einen Punct in der, durch die Achse und die Excentricität bestimmten Hyperbel.

39.

Aufgabe. Aus dem gegebenen Begriffe der Hyperbel eine Gleichung für dieselbe abzuleiten, wenn die Achse und die Excentricität gegeben, und der Mittelpunct zum Anfangspunct genommen wird.



Auflösung. Es sei die

halbe Achse $AC = a$
Excentricität $CF = e$
Leitstrahl $FM = r$
„ $F'M = r'$
folglich $r - r' = 2a$
Abscisse $CP = x$
Ordinate $MP = y$

so hat man, durch ganz gleiche Schlüsse wie bei der Ellipse (§ 33)

$$r^2 = y^2 + (x + e)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$r'^2 = y^2 + (x - e)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Subtrahire (2) von (1), kommt

$$(r+r')\ (r-r')=4\,ex$$

und durch $r-r'=2a$ dividirt:

$$r+r'=\frac{2ex}{a}$$

addire: $r-r'=2a$

kommt: $\quad r=\dfrac{ex+a^2}{a}$

diesen Werth von r in (1) substituirt, kommt:

$$y^2+(x+e)^2=\frac{(ex+a^2)^2}{a^2}$$

und hieraus:

$$a^2y^2-(e^2-a^2)x^2=-a^2(e^2-a^2)\ \ldots\ldots\ldots (3)$$

Setzen wir zur Vereinfachung dieser Gleichung den beständigen Werth der zweitheiligen Grösse:

$$e^2-a^2=b^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

so ist die verlangte Gleichung der Hyperbel:

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Diese sogen. Mittelpuncts-Gleichung der Hyperbel hat Aehnlichkeit mit der Gleichung der Ellipse und folgt daraus, wenn man darin $b\sqrt{-1}$ statt b, folglich $-b^2$ statt $+b^2$ setzt.

Wegen dieser Aehnlichkeit der Hyperbel mit der Ellipse, denkt man sich aus einem der Scheitel (B) mit dem Halbmesser $CF=e$, von der Ordinaten-Achse die Stücke $CD=CE=\sqrt{e^2-a^2}=b$ abgeschnitten, und nennt diese Linie $DE=2b$ die zweite (aber nur eingebildete Achse) der Hyperbel.

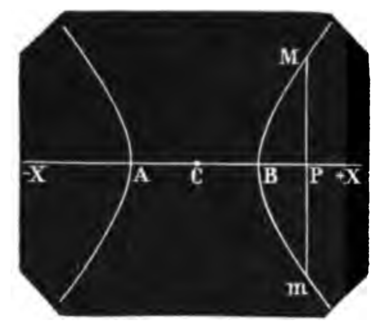
40.

Aufgabe. Was ist der räumliche Sinn folgender Gleichung, deren Ursprung unbekannt sein soll?

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Auflösung. Aus der vorgegebenen Gleichung folgt:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$



Nehmen wir in einer beliebigen Abscissenrichtung, XX, einen Punct, C, als Anfangspunct, so ist:

1) Für $x=0$, die Ordinate imaginär, nämlich $y=b\sqrt{-1}$. Die Ordinaten-Achse wird also nicht geschnitten.

2) Um die etwaigen Durchschnittspuncte in der Abscissen-Achse zu finden, setzen wir in (1), oder (2), $y=0$, dann wird $x=\pm a$. Nehmen wir also $CB=+a$, $CA=-a$, so sind A, B die gesuchten Durchschnittspuncte.

3) Für alle $x<\pm a$ giebt es keine Ordinaten.

4) Für jedes $x>\pm a$ giebt es zwei gleiche entgegengesetzte Ordinaten, die mit den Abscissen wachsen.

5) Zu gleichen entgegengesetzten Abscissen gehören gleiche Ordinaten.

Unsere krumme Linie, die wir Hyperbel nennen wollen, besteht also aus zwei vollkommen gleichen getrennten Linien, die jede mit zwei Zweigen ohne Grenzen ins Unendliche fortgehen. Die krumme Linie (Hyperbel) ist folglich, so wie auch ihre Gleichung, eine discontinuirliche (Einl. Seite 23.)

41.

Aufgabe. Zu untersuchen, ob die Hyperbel einen Brennpunct, nämlich einen solchen Punct habe, dass der von ihm nach einem beliebigen Punct, M (x, y), der Hyperbel gehende Leitstrahl (r) eine rationale Function von der Abscisse x werde.

Auflösung. Die Schlüsse und Rechnungen sind hier ganz dieselben, wie für die Ellipse (§ 35). Auch müssen, wegen der Aehnlichkeit in den Gleichungen beider Linien, die sich nur durch die entgegengesetzten Vorzeichen des Coefficienten b^2 unterscheiden, die fraglichen Ausdrücke für α, $\mathfrak{b}$, r aus jenen (§ 35) folgen, indem man darin bloss $-b^2$ statt b^2 setzt. Es muss also $\mathfrak{b}=0$ sein, und die Gleichung (2) § 35 verändert sich in:

$$r^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2-2\alpha x+(\alpha^2-b^2)\ldots\ldots\ldots(1)$$

und damit r rational wird, muss die Abscisse α des Brennpuncts so genommen werden, dass

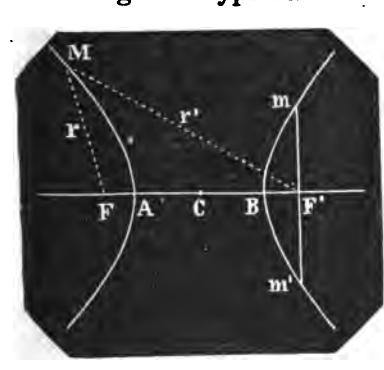
$$\frac{a^2+b^2}{a^2}(\alpha^2-b^2)=\alpha^2$$

$$\text{mithin: } \alpha=\sqrt{(a^2+b^2)}=\pm e$$

Die beiden Werthe von α, welche wir mit $\pm e$ bezeichnet haben, sind reell, und folglich hat die Hyperbel zwei in der Abscissen-Achse liegende Brennpuncte, welche rechts und links vom Mittelpunct C um $e=\sqrt{a^2+b^2}$ entfernt liegen.

Um diese Puncte durch Construction zu finden, errichte man im Mittelpunct C ein Perpendikel, $DC=b$, und ziehe DB, so ist $DB=\sqrt{a^2+b^2}=e$. Nimmt man also die Excentricität $CF'=CF=DB$, so sind F und F' die Brennpuncte.

Um die Grösse des durch einen der Brennpuncte gehenden, durch a und b (die wirkliche und eingebildete Achse) bestimmten Parameters, $mm'=p$, zu finden, brauchen wir nur in der Gleichung der Hyperbel



$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

die veränderliche Grösse

$$x=CF=\sqrt{a^2+b^2}$$

zu setzen, so erhält man die Ordinate

$$mF'=\tfrac{1}{2}p=\frac{b^2}{a}$$

folglich ist auch in der Hyperbel, (wie in der Ellipse) die eingebildete Achse $2b$, die mittlere Proportionale zwischen der wirklichen Achse und dem Parameter.

Um die Längen der beiden, nach einem Punct, M (x, y), führenden Leitstrahlen $FM=r$ und $F'M=r'$ zu finden, setzen wir in (1) $\pm e$ statt α, und e^2 statt a^2+b^2, so ist:

$$r^2=\frac{e^2}{a^2}x^2\pm 2ex+a^2$$

$$r=\frac{ex}{a}-a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$r'=\frac{ex}{a}+a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

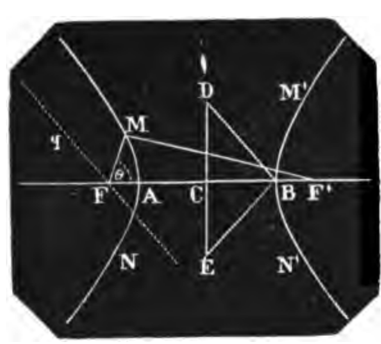
Subtrahirt man (2) von (3), so kommt

$$r' - r = 2a$$

in Worten: die Differenz zweier Leitstrahlen ist für alle Puncte der Hyperbel immer $= 2a =$ der Achse AB

42.

Aufgabe. Die Polargleichung der Hyperbel zu finden, wenn die Achse $AB = 2a$, die Excentricität $CF = e$ gegeben, und der Pol im Brennpunct F angenommen wird.



Auflösung. Bezeichnet man den Polarwinkel MFA mit θ, den durch a, e, θ bestimmten Radius vector FM mit r, und den andern, F'M vorläufig mit r', so hat man aus dem Dreieck FMF', in welchem $FF' = 2e$; und wegen $r' - r = 2a$, also $r'^2 = (2a + r)^2$

$$\cos\theta = \frac{4e^2 + r^2 - (2a + r)^2}{4er}$$

$$\text{hieraus } r = \frac{e^2 - a^2}{a + e\cos\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

oder indem wir $\frac{e}{a} = \varepsilon$ setzen (§ 37)

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon\cos\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$r = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \varepsilon\cos\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Diese Polargleichungen der Hyperbel geben richtig beide Zweige, wenn man den Leitstrahl sich ganz herum von $\theta = 0$ bis $\theta = 360$, oder auch sowohl links, als rechts herum drehen lässt, d. h. den Polarwinkel θ sowohl positiv $0, 90^0 \ldots$, als negativ $0, -90 \ldots$ nimmt, und dabei das Vorzeichen von r gehörig beachtet, folglich die Länge von einem negativen r, in der, dem beweglichen Schenkel des Winkels θ entgegengesetzten Richtung nimmt. Die Gleichung (1) giebt uns z. B. für:

$\theta = 0^\circ, \ldots \pm 90^\circ, \pm AFq, \pm 180, \pm(360 - EBF'), \pm 270 \ldots \pm 360^\circ$

$\cos\theta = 1, \ldots \quad 0, -\frac{a}{e}, -1, \quad -\frac{a}{e} \quad \ldots \ 0, \ \ldots \ 1$

$r = e - a, \ \tfrac{1}{2}p, \quad \infty, -(e+a), \quad \infty, \quad \tfrac{1}{2}p, \ e - a$

Der Radius vector wächst von $\theta = 0$ bis $\theta = AFq$, wo r mit DB parallel läuft, $+\infty$ wird, und sofort in $-\infty$ umschlägt, nämlich den Ast AM verlässt, und bei ferner wachsendem θ, von $-\infty$ bis $-(e+a)$ abnimmt, und den Ast BN' beschreibt; denn für $\theta = AFq = F'BD$ ist $\cos\theta = -\cos DBC = -\frac{a}{e}$, also $r = \frac{e^2 - a^2}{0} = \infty$. Für $\theta > 180^\circ$ kommen die beiden andern Aeste.

Anmerkung. In der Polargleichung (3) der Hyperbel sind auch die der Parabel und Ellipse enthalten, wo aber für die Parabel $\varepsilon = 1$, für die Ellipse $\varepsilon < 1$, und für die Hyperbel $\varepsilon > 1$.

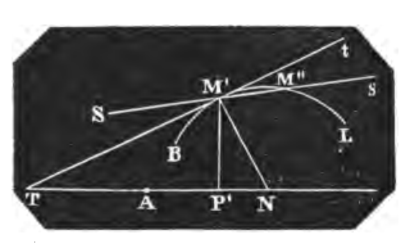
Drittes Buch.

Methode der Tangenten.

43.

Erklärung. Um zuerst einen allgemeinen, auf alle krumme Linien passenden Begriff einer Berührungslinie festzusetzen, auf welchen zugleich die Analysis mit Erfolg und bequem angewandt werden kann, sei BL irgend eine krumme Linie, $y = \varphi x$, und M′ der Punct, in welchem sie von einer graden Tt berührt werden soll.

Denkt man sich nun durch diesen Berührungspunct M′ und einen andern benachbarten Punct, M″, erst eine Sekante, S*s*, gezogen, und diese dann so um den Berührungspunct M′ gedreht, dass der 2te Durchschnittspunct M″ immer näher an M′ rückt, so muss die Sekante S*s* einmal in eine solche Lage T*t* kommen, in welcher der Punct M″ mit M′ zusammenfällt, und diese Linie T*t* nennt man dann die Tangential oder Berührungslinie für den Punct M′ (wie oft sie übrigens diesseits oder jenseits von M′ die krumme Linie auch schneiden möge).



1. Besonders nennt man auch das Stück M′T der Berührungslinie, vom Berührungspunct bis zum Durchschnittspunct mit der Abscissenlinie, die Tangente des Punctes M′, und diese Linie ist immer wesentlich positiv.

2. Das Stück TP′ der Abscissen-Linie, vom Durchschnittspunct der Tangente bis zum Fusspunct der Ordinate, heisst Subtangente, und ist positiv oder negativ, je nachdem der Winkel T spitz oder stumpf ist, die Ordinaten wachsen oder abnehmen (in vorstehender Figur ist die Subtangente TP′ positiv).

3. Die auf der Tangente im Berührungspunct M′ senkrechte Linie, oder besonders nur das Stück M′N derselben, vom Berührungspunct bis zum Durchschnittspunct mit der Abscissen-Linie, heisst die Normale des Punctes M′, und diese Linie ist wesentlich positiv.

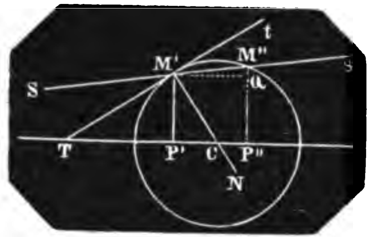
4. Das Stück P′N der Abscissen-Linie, vom Fusspunct der Ordinate bis zum Durchschnittspunct mit der Normale, heisst Subnormale, und diese ist positiv oder negativ, je nachdem der Winkel T spitz oder stumpf ist (die Ordinaten wachsen oder abnehmen).

Die Grössen dieser vier Linien M′T, P′T, M′N, P′N ändern sich (im Allgemeinen) mit der Lage des Punctes M′, sind aber in jedem Fall durch die Coordinaten desselben vollkommen bestimmt. Die Verfahrungsweisen, ihre Grössen aus den gegebenen Coordinaten zu berechnen, nennt man Methode der Tangenten, und man berechnet sie deshalb, weil man dadurch oft einen deutlichern Begriff von dem Laufe oder der Richtung einer krummen Linie in ihren verschiedenen Puncten erhält, und Eigenschaften derselben entdeckt, wie die folgenden Beispiele zeigen werden. Alle Aufgaben über Tangentenziehen kommen übrigens auf folgende zwei zurück: Entweder sind die Coordinaten (x', y') des zu berührenden Punctes M′, oder die Coordinaten (α, β) eines ausserhalb der krummen Linie liegenden Puncts gegeben, von welchem aus eine Berührungslinie gezogen werden soll.

I. Tangenten am Kreise.

44.

Aufgabe. Es sind die Coordinaten des Berührungspuncts M′ (x', y') eines bestimmten Kreises (C als Anfangspunct) gegeben. Man sucht die hiedurch bestimmten Grössen der Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale für diesen Punct M′. Kürze halber bezeichne man (nach Cauchy) die Grössen dieser vier Linien der Reihe nach mit T, S_t, N, S_n.



Auflösung. Man suche hier (wie in allen ähnlichen Fällen) erst die Gleichung der Berührungslinie Tt, und dann die Gleichung der Normale MN, woraus man das Gesuchte leicht findet.

1. Um die Rechnung einzuleiten, nehmen wir noch einen zweiten Punct, M'', zu Hülfe, dessen Coordinaten x'', y'' (weil sie nur Hülfsgrössen sind, und aus der Rechnung doch wieder heraus, oder mit x', y' zuletzt zusammen fallen) unbestimmt bleiben können.

Suchen wir nun zuerst die Gleichung der durch die beiden Puncte (x', y'), (x'', y'') gehenden Sekante Ss, für denselben Anfangspunct C, so ist nach § 12, 6 für diese Sekante:

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x') \dots\dots\dots\dots (1)$$

2. Der Coefficient $\frac{y' - y''}{x' - x''}\left(= \frac{M''Q}{M'Q}\right)$ ist hier bekanntlich die trigonometrische tangente des Winkels, den die Sekante mit der Abscissen-Linie macht, § 11. Um nun zuerst für diesen Coefficienten einen schicklichern Ausdruck zu erhalten, der nicht auf die vieldeutige Form $\frac{0}{0}$ führt, wenn man darin, um M'' auf M' fallen zu lassen, $x'' = x'$ und $y'' = y'$ setzt, beachte man, dass je zwei Coordinaten, x', y' und x'', y'' (weil M' und M'' in einem Kreise, dessen Radius $= a$, liegen), von einander abhängen. Wir haben nämlich zur Umformung des Coefficienten $\frac{y' - y''}{x' - x''}$ noch die beiden Bedingungsgleichungen:

$$y'^2 + x'^2 = a^2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$
$$y''^2 + x''^2 = a^2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

und hieraus, (3) von (2) subtrahirt, (Algebra § 143):

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{x' + x''}{y' + y''} \dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

Dies in (1) substituirt, ist die Gleichung der Sekante:

$$y - y' = -\frac{x' + x''}{y' + y''}(x - x') \dots\dots\dots\dots (5)$$

3. Lässt man nun die Sekante Ss sich um den Punct M'

drehen, bis M″ mit M′ zusammenfällt, so kommt sie in die Lage der durch M′ gehenden Tangente Tt, und es ist demnach, indem wir nur in (5) $x''=x'$; $y''=y'$ setzen, die gesuchte Gleichung dieser Tangente:

$$y-y'=-\frac{x'}{y'}(x-x') \ldots\ldots\ldots\ldots (6)^{*})$$

4. Dieser Gleichung kann man noch eine andere Form geben. Es ist nämlich, wenn man mit y' multiplicirt und beachtet, dass $y'^2+x'^2=a^2$:

$$y'y+x'x=a^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

In beiden Gleichungen (6), (7) sind x' und y' $(=\sqrt{a^2-x'^2})$ bestimmte, x und y aber die veränderlichen (laufenden) Coordinaten der graden Linie Tt.

5. Der beständige Coefficient $-\frac{x'}{y'}$ in (6) ist die trigon. tangente des Winkels T, unter welchem die Berührungslinie Tt die Abscissenachse schneidet, und dieser Coefficient $-\frac{x'}{y'}$ ist positiv, wenn $x'=$ CP′ negativ ist, und umgekehrt.

6. Um die Subtangente P′T zu erhalten, braucht man nur die gegebene Ordinate MP′ $=y'$ mit cot T $=-\frac{y'}{x'}$ zu multipliciren. Aus dieser Subtangente und der Ordinate kann man dann auch leicht, vermöge der beiden entstandenen rechtwinkligen und ähnlichen Dreiecke M′P′T, M′P′C, die drei übrigen Linien, Tangente, Subnormale und Normale finden. Man hat nämlich aus dem rechtw. Dreieck M′P′T die Subtangente TP′ $=$ M′P . cot T, mithin $S_t=-\frac{y'^2}{x'}$, oder, wenn man alles durch die Abscisse x' ausdrücken will: $S_t=-\frac{a^2-x'^2}{x'}$; für positive x' ist diese Subtangente negativ, weil dann die Berührungslinie mit der positiven Abscissenrichtung einen stumpfen Winkel macht, dessen trigon. tangente $=-\frac{x'}{y'}$ ist. Da nun $\overline{M'T}^2=\overline{M'P'}^2+\overline{TP'}^2$, oder: $T^2=y'^2+S_t^2$, so ist:

$$T^2=y'^2+\frac{y'^4}{x'^2}=\frac{y'^2}{x'^2}(x'^2+y'^2)=\frac{y'^2 a^2}{x'^2}$$

---

*) Oder auch so geschrieben:

$$y=-\frac{x'}{y'}.x+y'+\frac{x'^2}{y'} \quad (\S\ 11).$$

daher: $T = \pm \frac{ay'}{x'} = \frac{a}{x'}\sqrt{a^2 - x'^2}$; das zu nehmende Vorzeichen ist durch die Festsetzung (§ 43, 2) bestimmt, dass die Tangente T immer positiv sein muss.

Aus dem rechtw. Dreieck M'P'C, in welchem Winkel M' = Winkel T, folgt: P'C = M'P tg M'; mithin ist: $S_n = -\frac{y' \cdot x'}{y'} = -x'$ offenbar negativ, wenn x' positiv, und umgekehrt.

Da nun

$\overline{M'C}^2 = \overline{M'P'}^2 + \overline{P'C}^2$, oder: $N^2 = y'^2 + S_n^2 = y'^2 + x'^2 = a^2$, so ist $N = a$. Die fraglichen durch M' (x', y') bestimmten vier Linien sind also (für den Kreis):

$$T = \pm \frac{ay'}{x'} = \frac{a}{x'}\sqrt{a^2 - x'^2}$$

$$S_t = -\frac{y'^2}{x'} = -\frac{a^2 - x'^2}{x'}$$

$$N = a$$
$$S_n = -x'.$$

7. Zur Uebung dienend, bestimme man diese vier Linien auch nach folgender üblichen Methode. Aus der Gleichung der Berührungslinie Tt findet man leicht die Abscisse ihres Durchschnittspuncts. Wir setzen deshalb in (6) oder (7) $y = 0$, so ist (§ 7):

$$x = \frac{a^2}{x'} = CT$$

$$S_t = x' - x = x' - \frac{a^2}{x'} = -\frac{y'^2}{x'} = CP' - CT \; ^{*})$$

Um die Tangente M'T zu erhalten, berechnen wir (nach § 10) den Abstand der beiden Puncte T $\left(\frac{a^2}{x'}, 0\right)$ und M' (x', y') und finden:

$$T = \sqrt{(y' - 0)^2 + \left(x' - \frac{a^2}{x'}\right)^2}$$

Oder wenn man die Klammern unter dem Wurzelzeichen auflöst und beachtet, dass $y'^2 + x'^2 = a^2$:

*) Damit die Subtangente das ihr nach der Bestimmung (§ 43, 2) zukommende Vorzeichen erhält, muss man die berechnete Abscisse des Punctes T von der gegebenen des Berührungspunctes subtrahiren.

$$\mathrm{T} = \frac{a}{x'}\sqrt{a^2 - x'^2} = \pm \frac{ay'}{x'}$$

Aus der Gleichung (6) der Berührungslinie

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x')$$

folgt die Gleichung der darauf senkrechten, durch den Punct M′ (x', y') gehenden Normale (§ 18):

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x')$$

Setzen wir hierin, um die Abscisse ihres Durchschnittspuncts zu erhalten, $y = 0$, so kommt:

$$x = 0$$

folglich geht die Normallinie durch den Anfangspunct C, und es ist also die

$$\mathrm{S}_n = 0 - x' = -x'$$

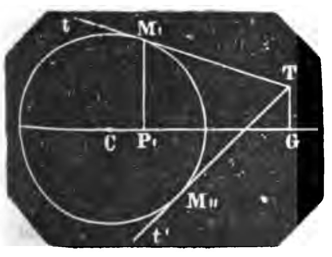
Aus den Coordinaten der beiden Puncte M′ $(x' y')$; C $(0, 0)$ folgt:

$$\mathrm{N} = \sqrt{y^2 + x'^2} = a$$

Wir halten uns hier bei den, aus den Ausdrücken für die Tangente, Subtangente etc. leicht zu folgernden bekannten Eigenschaften des Kreises und Constructionen dieser Linien nicht auf, indem wir nur die Methode der Tangenten zuerst an einer aus der Elementar-Geometrie bekannten Linie zeigen wollten.

45.

* **Aufgabe.** Aus einem gegebenen Punct, T (a, b), soll eine Tangente an einen gegebenen Kreis gezogen und die Coordinaten des Berührungspuncts bestimmt werden. Der Mittelpunct C ist Anfangspunct.



Auflösung. Bezeichnen wir den Radius des Kreises mit r, die unbekannten, durch r, a, b bestimmten Coordinaten des gesuchten Berührungspuncts $M_,$ mit $x_,$, $y_,$, so können wir die Gleichung der durch $M_,$ gehenden Tangente Tt in folgender Form schreiben (§ 44, 7):

$$yy_{,}+xx_{,}=r^2 \dots\dots\dots\dots (1)$$

Zur Bestimmung der beiden unbekannten Coordinaten $x_{,}$, $y_{,}$ (denn x, y sind die laufenden) können wir nun zwei Gleichungen aufstellen.

Weil nämlich die Tangente durch den gegebenen Punct T(a, b) gehen soll, also die Gleichung (1) derselben, $y=b$ für $x=a$ geben muss, so haben wir aus (1):

$$by_{,}+ax_{,}=r^2 \dots\dots\dots\dots (2)$$

und, weil der Punct M, $(x_{,}\ y_{,})$ im Kreise liegt, also die eine unbekannte $y_{,}$ durch die andere $x_{,}$ bestimmt ist, noch die erforderliche zweite Gleichung:

$$y_{,}^2+x_{,}^2=r^2 \dots\dots\dots\dots (3)$$

Aus der Gleichung (2) folgt:

$$y_{,}=\frac{r^2-a x_{,}}{b} \dots\dots\dots\dots (4)$$

Diesen Werth von $y_{,}$ in (3) substituirt, wird die unbekannte $y_{,}$ eliminirt, und wir haben zur Bestimmung der andern $x_{,}$ die Gleichung:

$$\left(\frac{r^2-a x_{,}}{b}\right)^2+x_{,}^2=r^2$$

Diese verwickelte quadratische Gleichung auf $x_{,}$ reducirt, erhalten wir die gesuchte Abscisse des Berührungspuncts:

$$x_{,}=\frac{ar^2 \pm br\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{a^2+b^2} \dots\dots\dots (5)$$

Aus dem doppelten Vorzeichen schliessen wir, dass es zwei Berührungspuncte, $M_{,,}$ $M_{,,,}$ giebt. Setzen wir die Werthe von $x_{,}$ aus (5) in (4), so erhalten wir auch die beiden Ordinaten:

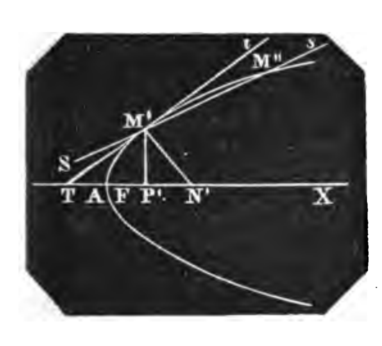
$$y_{,}=\frac{br^2 \mp ar\sqrt{a^2+b^2-r^2}}{a^2+b^2} \dots\dots\dots (6)$$

II. Tangenten an der Parabel.

46.

Aufgabe. Es sind die Coordinaten des Berührungspuncts M' (x', y') in einer durch ihre Gleichung $y=\sqrt{px}$ bestimmten

Parabel gegeben. Gesucht: die Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale für diesen Punct M'.



Auflösung. Nehmen wir, zufolge Erklärung § 43, noch einen zweiten Punct, $M''(x'', y'')$, so ist die Gleichung der durch M', M'' gehenden Sekante Ss:

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x') \ldots\ldots (1)$$

Hierin sind y', y'' durch x', x'' bestimmt, weil nämlich M', M'' in der Parabel $y^2=px$ liegen, so haben wir noch die beiden Bedingungsgleichungen:

$$y'^2=px' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$y''^2=px'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Subtrahirt man (3) von (2), so kommt:

$$\frac{y'-y''}{x'-x''}=\frac{p}{y'+y''}$$

Den Werth von diesem Coefficienten $\frac{y'-y''}{x'-x''}$ in (1) substituirt, erhält die Gleichung der Sekante Ss diese Form:

$$y-y'=\frac{p}{y'+y''}(x-x') \ldots\ldots\ldots (4)$$

Lässt man jetzt den Punct M'' mit M' zusammenfallen, so wird $y''=y'$, und man erhält dadurch aus (4) die Gleichung der Tangentiallinie Tt:

$$y-y'=\frac{p}{2y'}(x-x') \ldots\ldots\ldots\ldots (5)^{*)}$$

oder auch, wenn man mit $2y'$ multiplicirt und beachtet, dass $y'^2=px'$ ist, unter dieser Form:

*) Der Coefficient $\frac{p}{2y'}$ ist die trigon. tangente des Winkels bei T. Vermittelst derselben erhalten wir aus den beiden ähnlichen rechtw. Dreiecken TM'P' und P'M'N eben so wie § 44, 6, sehr leicht die Subt., Tang., Subn. und Normale für den beliebig gegebenen Punct $M'(x', y')$ der Parabel, nämlich:

$$S_t=2x'; \qquad S_n=\tfrac{1}{2}p$$
$$T=\sqrt{(p+4x')x'}; \qquad N=\sqrt{(x'+\tfrac{1}{4}p)p}$$

$$yy' = \tfrac{1}{2}p(x + x') \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Setzt man, um die Abscisse des Durchschnittspuncts T zu erhalten, $y = 0$, so ist:

$$x = -x' = AT$$

$$\text{mithin: } S_t = x' - x = 2x' \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Aus den Coordinaten der beiden Puncte M' (x', y'), T $(-x', 0)$ folgt (nach § 10) die Tangente

$$T = \sqrt{(p + 4x')x'} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Aus (5) folgt die Gleichung der durch M' (x', y') gehenden Normallinie (§ 18):

$$y - y' = -\frac{2y'}{p}(x - x') \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

hieraus für $y = 0$ die Abscisse des Durchschnittspuncts N':

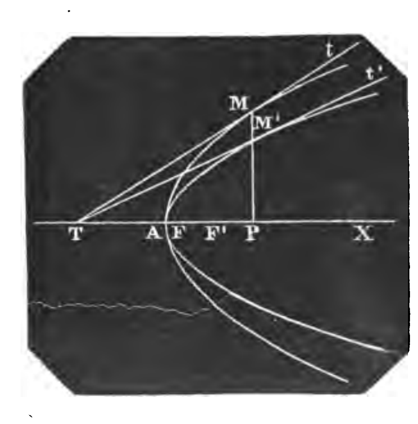
$$x = x' + \tfrac{1}{2}p = AN'$$

$$\text{mithin: } S_n = x - x' = \tfrac{1}{2}p \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

und aus M' (x', y') und N' $(x' + \frac{1}{2}p, 0)$ die Normale

$$N = \sqrt{(x' + \tfrac{1}{4}p)p} \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Die Gleichungen 8 und 11 lehren nur, dass die Tangente und die Normale mit der Abscisse wächst. Die Gleichungen 7 und 10 aber lehren, als eine merkwürdige Eigenschaft der Parabel, dass die Subnormale für alle Puncte dieselbe, nämlich immer dem halben Parameter gleich ist, und dass die Subtangente jedesmal gleich der doppelten Abscisse ist. Es ist daher leicht, durch einen in der Parabel gegebenen Punct, M', eine Tangente an dieselbe zu ziehen. Man nimmt nämlich auf der rückwärts verlängerten Achse das Stück AT = der Abscisse des Berührungspuncts M' (= AP') und zieht dann von T durch M' die Linie T*t*.



Zusatz. Denkt man sich über eine gemeinschaftliche Achse, AX, mehre Parabeln von verschiedenen Parametern construirt, und dann durch

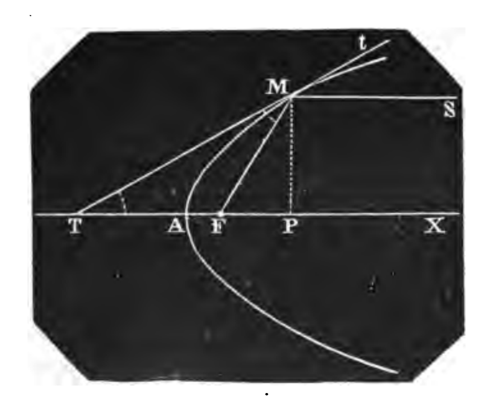
Puncte, die, wie M, M'.., in einerlei Ordinaten-Richtung liegen, Tangenten gezogen, so schneiden sich diese in einerlei Punct, T.

Anmerkung. Die Aufgabe, von einem ausserhalb einer Parabel gegebenen Punct eine Tangente an die Parabel zu ziehen und die Coordinaten des Berührungspuncts zu bestimmen, wird ebenso gelöst, wie die Aufgabe in § 45.

47.

Eine andere merkwürdige Eigenschaft der Parabel konnte, weil sie sich fast von selbst darbietet, nicht lange unbemerkt bleiben.

Zieht man nämlich vom Brennpunct F nach einem beliebigen Punct, M (x, y), der Parabel den Radius vector FM, so ist der Winkel, den derselbe mit der durch denselben Punct gezogenen Tangente bildet, gleich dem Winkel, den die Tangente mit der Abscissenlinie macht.



Denn weil bekanntlich: $AF = \frac{1}{4}p$; $AT = AP$ $(= x)$, so ist:

$$TF = FM = x + \tfrac{1}{4}p$$

mithin das Dreieck TFM ein gleichschenkliges, daher Winkel

$$FMT = FTM$$

Diese Eigenschaft der Parabel hat zur Construction parabolischer Spiegel Anlass gegeben.

Stellt man sich nämlich vor: der Bogen AM der Parabel drehe sich um die (feste) Achse AP, so beschreibt er eine krumme parabolische Fläche. Denkt man sich dieselbe inwendig polirt (spiegelnd), so hat man den Begriff eines parabolischen Spiegels.

Um die Wirkung und den Nutzen eines solchen Spiegels zu erklären, müssen wir den Satz aus der Optik als bekannt voraussetzen, dass ein Lichtstrahl, SM, der auf eine spiegelnde Fläche fällt, immer unter demselben Winkel reflectirt (zurückgeworfen) wird, unter welchem er auffällt, und dass dieser Winkel gleich dem ist, welchen der auffallende Strahl SM mit dem Elemente der Fläche, also mit der im Einfallspunct M gezogenen Tangente T*t* macht.

Wird nun ein solcher parabolischer Spiegel mit seiner Achse AX gegen einen Stern, gegen den Mittelpunct der an 20000000 Meilen entfernten Sonne (ja selbst gegen einen irdischen, nur ein paar Meilen entfernten Gegenstand) gerichtet, so kann man in practischer Hinsicht alle darauf fallenden Strahlen, wie SM, als parallel mit der Achse AX betrachten, und deshalb müssen sie alle, nach erfolgter Reflection, durch einen und denselben um $\frac{1}{4}$ des Parameters vom Scheitel entfernten Punct, F, gehen, denn Winkel $SMt = FTM = FMT$.

Weil nun eine unendliche Menge von Strahlen gleichsam in einem einzigen Punct gesammelt, verdichtet werden, so muss gerade an diesem Punct F eine grosse Helligkeit (Hitze) entstehen, und dies ist der Grund, weshalb man ihn den Brennpunct nennt.

Befände sich umgekehrt in F ein leuchtender Punct, so würden alle von ihm ausgehenden Lichtstrahlen parallel mit der Achse reflectirt und folglich mittelst eines, die Zerstreuung der Lichtstrahlen verhütenden parabolischen Spiegels eine beabsichtigte Erleuchtung auf einen bestimmten Gegenstand geworfen werden können. Dies der Grund, warum man parabolische Spiegel auf Leuchtthürmen etc., so wie auch zu Sprach- und Hör-Röhren zu benutzen gesucht hat.

Zusatz. Noch eine andere merkwürdige Eigenschaft der Parabel, und die in der Mechanik leicht eine Anwendung finden könnte, ist die folgende: Zieht man aus einem beliebigen Punct der Leitlinie zwei Tangenten an die Parabel, so bilden diese immer einen rechten Winkel mit einander, und die grade Linie, welche die beiden Berührungspuncte verbindet, geht durch den Brennpunct. Der Beweis ist leicht.

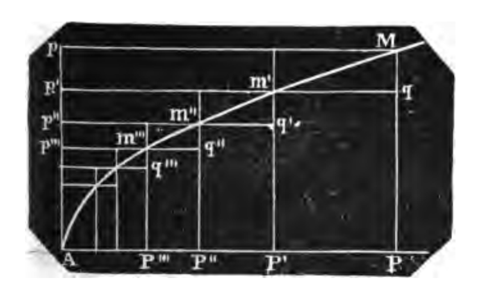
Anmerkung. Die Parabel hat so viele merkwürdige Eigenschaften, dass die vollständige Aufzählung derselben einen ganzen Band füllen würde. Wir haben von den jetzt bekannten Eigenschaften, die Grenzen dieses Buches berücksichtigend, nur die wichtigsten angeführt. Folgender merkwürdiger Satz möge indessen, seiner practischen Wichtigkeit halber, hier noch Platz finden.

48 a.

Lehrsatz. Der Flächeninhalt einer Parabel, $y = \sqrt{ax}$, nämlich das von einem Bogen, AM, und den Coordinaten AP $= x$ und MP $= y$ begrenzte Stück, ist so gross, als Zweidrittel des aus denselben Coordinaten construirten Rechtecks. In Zeichen:

$$\text{Fläche AMP} = \tfrac{2}{3}xy = \tfrac{2}{3}x \cdot \sqrt{ax}$$

Beweis. Man denke sich die Abscisse AP $= x$ in eine beliebige Anzahl, jedoch solcher Theile getheilt, dass von den zu den Abscissen AP $= x$, AP$' = x'$, AP$'' = x''$ .... gehörenden Ordinaten MP $= y$, m'P$' = y'$, m''P$'' = y''$ ...... jede die nächst kleinere um den gleichvielsten, z. B. $n$ten Theil derselben übertrifft, so dass:



$$y = y' + \frac{1}{n}y'$$
$$y' = y'' + \frac{1}{n}y''$$
$$y'' = y''' + \frac{1}{n}y'''$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Im Scheitel A sei das Perpendikel Ap auf AP errichtet, und durch die Puncte M, m', m''... die mit AP parallelen Linien pM, $p'q$... gezogen, so sind hiedurch und durch die Verlängerung der Ordinaten innere und äussere Rechtecke gebildet. Bezeichnen wir die Flächen der innern, wie Pm', P$'m''$..., Kürze halber, mit P, P$'$... und die der äussern, wie pm', $p'm''$... mit p, p'... so ist:

$$\text{P} = y'(x - x'), \text{ und } p = x'(y - y')$$
$$\text{P}' = y''(x' - x''), \quad \text{,,} \quad p' = x''(y' - y'')$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{P}{p} = \frac{y'(x-x')}{x'(y-y')} = \frac{y'(x-x')(y+y')}{x'(y^2-y'^2)} = \frac{y'(x-x')(y+y')}{x'(ax-ax')}$$

$$\frac{P}{p} = \frac{y'(y+y')}{ax'} = \frac{y'(y'+\frac{1}{n}y'+y')}{y'^2} = \frac{y'^2(2+\frac{1}{n})}{y'^2}$$

$$\frac{P}{p} = 2+\tfrac{1}{n}, \text{ also: } P = (2+\tfrac{1}{n})p$$

$$\text{ebenso: } \frac{P'}{p'} = 2+\tfrac{1}{n}, \text{ also: } P' = (2+\tfrac{1}{n})p'$$

Mithin:

$$P+P'+P''+\dots = (2+\tfrac{1}{n})(p+p'+p''+\dots)$$

d. h. die Summe aller innern Rechtecke ist $2+\frac{1}{n}$ mal so gross, als die Summe aller äussern. Dieser Satz findet offenbar immer Statt, wie gross die Anzahl der Rechtecke auch sein möge; er gilt also auch bis an die Grenze, wo die Rechtecke unendlich schmal werden; in diesem Fall wird n unendlich gross, und $\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$, folglich ist auch die Parabelfläche APMA doppelt so gross, als die Fläche ApMA, und mithin Zweidrittel vom Rechtecke APMp. Wäre z. B. AP $= 9$ Fuss, MP $= 7$ Fuss, so wäre die Fläche von AMP $= \frac{2}{3}\cdot 9\cdot 7 = 42$ □'. (Einen kürzern Beweis lehrt die Integral-Rechnung.)

48 b.

Um die Flächeninhalte krummlinigt begrenzter Figuren, so wie sie wohl in Maschinenzeichnungen vorkommen, annähernd zu bestimmen, pflegt man, wenn keine grosse Genauigkeit gefordert wird, folgendermaassen zu verfahren.

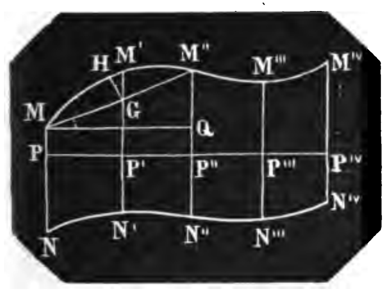
Man zieht (s. Figur § 48 c) durch die Fläche eine Abscissenlinie (ist eine Begrenzung eine grade Linie, so nimmt man diese als Abscissenlinie) und theilt sie in so kleine gleiche Theile, PP' $=$ P'P'' etc. $= h$, dass man die zwischen je zwei Ordinaten, MP $= y_0$, M'P' $= y_1$ etc., enthaltenen Bögen näherungsweise als grade Linien, mithin die gebildeten Vierecke, wie MPP'M', als Trapeze betrachten kann, und berechnet dann diese Trapeze. Heisst F der Inhalt, so ist:

$$F = h[\tfrac{1}{2}(y_0+y_1)+\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)+\dots+\tfrac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)]$$
$$F = h[y_1+y_2+y_3+\dots+y_{n-1}+\tfrac{1}{2}(y_0+y_n)]$$

Anmerkung. Diese Formel gilt offenbar auch mit für den unteren Bogen, wo dann aber MN $= y_0$, M'N' $= y_1$ etc. ist.

48 c.

Auf eine fast ebenso einfache, aber schärfere Formel zur Bestimmung des Flächeninhalts führt die Simpson'sche Methode, nach welcher die Abscissenlinie nur in so viel gleiche Theile getheilt zu werden braucht, dass man die zwischen je zwei Ordinaten enthaltenen Bögen als Parabelbögen betrachten kann. (Andere Bögen, wie Kreisbögen etc., würden nicht so bequeme Formeln geben.)



Ist nämlich $PP' = P'P'' = h$, $MP = y_0$, $M'P' = y_1$, $M''P'' = y_2$, so ist auch $MG = GM''$. Denkt man sich HG senkrecht auf der Sehne MM'' und betrachtet die Bögen HM, HM'' als Parabelbögen, deren gemeinschaftlicher Scheitel in H ist, und folglich HG als gemeinschaftliche Achse beider Parabeln, so ist nach § 48 a der Flächeninhalt des durch Sehne und Bogen gebildeten Abschnitts:

$$= \tfrac{2}{3} HG \cdot GM'' + \tfrac{2}{3} HG \cdot GM = \tfrac{2}{3} HG \cdot MM''$$

Nun kann man in practischer Hinsicht den kleinen Bogen HM' als eine grade Linie betrachten, und dann ist das kleine bei H rechtwinklige Dreieck HGM' ähnlich dem Dreiecke M''MQ, mithin $HG : M'G = MQ : MM''$, woraus $M'G \cdot MQ = HG \cdot MM''$. Der Inhalt des Abschnitts ist also auch:

$$= \tfrac{2}{3} \cdot M'G \cdot MQ$$

oder weil $MQ = 2h$, und $M'G = M'P' - GP' = y_1 - \tfrac{1}{2}(y_0 + y_2) = \tfrac{1}{2}(2y_1 - y_0 - y_2)$, dies substituirt, ist der Inhalt des Abschnittes auch $= \tfrac{2}{3} h(2y_1 - y_0 - y_2)$. Wird hiezu der Inhalt des Trapezes $MP'' = h(y_0 + y_2)$ addirt, so hat man für den ganzen Inhalt F des durch $\widehat{MM''}$, MP, M''P'', PP'' begrenzten Flächenstücks:

$$F = \frac{h}{}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Diese Formel ist ganz allgemein, der Bogen möge, wie hier angenommen, der Abscissenachse die hohle oder auch die erhabene Seite zukehren, wie $M''M'''M^{IV}$. Geht man also noch zwei Ordinaten, y_3, y_4 weiter, so erhält man für die Fläche MP^{IV}

$$F = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$F = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Hieraus folgt nun die allgemeine Regel: Man theile die Abscissenlinie in eine grade Anzahl (n) gleicher Theile $= h$, so ist, wenn man die Ordinaten mit $y_0, y_1, \ldots y_n$ bezeichnet:

$$F = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + \ldots + y_n)$$

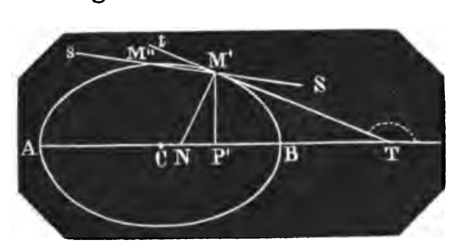
$$F = \tfrac{2}{3}h[(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_n) + (y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1}, - \tfrac{1}{2}(y_0 + y_n)]$$

in Worten: Man addire erst alle Ordinaten, dann alle Ordinaten mit ungraden Zeigern, addire beide Summen, und subtrahire wieder die halbe Summe der beiden äussersten etc. Anmerkung § 48 b (Vergl. Elementar-Geometrie 203).

III. Tangenten an der Ellipse.

49.

Aufgabe. Es ist die Mittelpunctsgleichung einer Ellipse gegeben, man verlangt die Gleichung der durch einen bestimmten Punct gehenden Tangential- und Normallinie, so wie die Subtangente und Subnormale für diesen Punct.



Auflösung. Sei die gegebene Ellipse:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2 b^2 \ldots (1)$$

und M' (x', y') in der Ellipse der gegebene Berührungspunct.

Nehmen wir noch einen zweiten Punct, M'' (x'', y''), in der Ellipse, so ist die Gleichung der durch beide gehenden Sekante:

$$Ss)\; y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x') \ldots\ldots\ldots (2)$$

und weil die Puncte M', M'' in der Ellipse liegen, also die Ordinaten y', y'' durch die Abscissen x', x'' bestimmt sind, die beiden Bedingungsgleichungen:

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$a^2 y''^2 + b^2 x''^2 = a^2 b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Subtrahire (4) von (3), kommt:

$$\frac{y'-y''}{x'-x''} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'+x''}{y'+y''}$$

folglich, wenn man M' mit M'' zusammenfallen lässt, die geforderte Gleichung der durch M' gehenden Tangentiallinie:

$$\text{T}t)\; y - y' = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}(x - x') \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\text{oder: } a^2 y' y + b^2 x' x = a^2 b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Aus (5) folgt die Gleichung der durch denselben Punct M' (x', y') gehenden Normallinie (§ 18):

$$\text{N}n)\; y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x') \ldots\ldots\ldots (7)$$

Die Gleichung (6) giebt die Abscisse*) des Durchschnittspuncts T, wo $y = 0$ ist, nämlich:

$$x = \frac{a^2}{x'} = \text{CT}$$

$$\text{S}_t = x' - x = x' - \frac{a^2}{x'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Aus (7) findet man die Abscisse des Puncts N, nämlich:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot x' = \text{CN} \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

$$\text{S}_n = x - x' = -\frac{b^2}{a^2} x' \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

---

*) S. Note § 44 und § 46. Weil $\text{tg P'M'T} = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}$ und $\text{tg P'M'N} = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}$ so ist für einen Punct, M' (x', y'), der Ellipse:

$$\text{S}_t = -\frac{a^2 y'^2}{b^2 x'} = \frac{b^2 (x'^2 - a^2)}{b^2 x'} = x' - \frac{a^2}{x'}$$

$$\text{T} = \sqrt{y'^2 + \frac{a^4 y'^2}{b^4 x'^2}} = \frac{y'}{b^2 x'}\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}$$

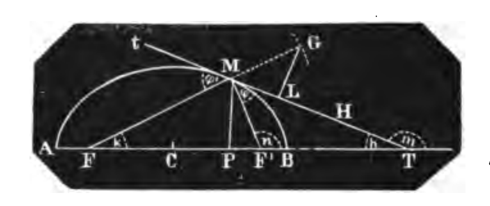
$$\text{S}_n = -\frac{b^2 x'}{a^2};\; \text{N} = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}$$

Die Gleichung (8) lehrt, dass die **Subtangente** von der kleinen Achse b gar nicht abhängt, und folglich alle über eine und dieselbe grosse Achse ($2a$) beschriebenen Ellipsen (und selbst der Kreis, als Ellipse, in welcher beide Achsen gleich sind), für Puncte von einerlei Abscissen auch einerlei **Subtangente** haben, und folglich die **Tangenten** in einem Punct, T, zusammenstossen (vergl. § 46, Zus.).

Die Gleichung 9 zeigt, dass M′ und N auf einerlei Seite der kleinen Achse liegen.

50.

Aufgabe. Das Verhältniss der beiden Winkel φ, φ' zu erforschen, welche die beiden nach einem beliebigen Berührungspunct, M (x, y), der Ellipse gehenden Leitstrahlen FM, F′M mit der Tangente Tt machen.



Auflösung. Es ist:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(m-n) = \frac{\operatorname{tg}m - \operatorname{tg}n}{1+\operatorname{tg}m\cdot\operatorname{tg}n} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}(h+k) = \frac{\operatorname{tg}h + \operatorname{tg}k}{1-\operatorname{tg}h\cdot\operatorname{tg}k} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Ferner hat man (§ 49, 5):

$$\operatorname{tg}m = -\frac{b^2x}{a^2y}; \qquad \operatorname{tg}n = \frac{y}{x-e}$$

$$\operatorname{tg}h = \frac{b^2x}{a^2y}; \qquad \operatorname{tg}k = \frac{y}{x+e}$$

daher: $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\frac{b^2x}{a^2y} - \frac{y}{x-e}}{1-\frac{b^2xy}{a^2y(x-e)}} = \frac{b^2(ex-a^2)}{ey(ex-a^2)}$$

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\frac{b^2x}{a^2y} + \frac{y}{x+e}}{1-\frac{b^2xy}{a^2y(x+e)}} = \frac{b^2(ex+a^2)}{ey(ex+a^2)}$$

$$\text{folglich } \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi' = \frac{b^2}{ey}$$

Die Leitstrahlen machen also mit jeder Tangente am Berührungspunct immer gleiche Winkel. Denkt man sich ein elliptisches Gewölbe, oder zwei solche und sich so entgegengesetzte elliptische Spiegel, dass sie, erweitert, ein geschlossenes Ellipsoid (von dem sie Theile sind) bilden, so müssen, vermöge jener Eigenschaft, alle von einem der Brennpuncte ausgehenden Schall-, Licht- und Wärmestrahlen, nach erlittener Reflection, durch den andern Brennpunct gehen, darin gesammelt und verdichtet werden, wie in der Experimental-Physik gezeigt wird.

Leicht ist es nun auch, die durch einen bestimmten Berührungspunct, M, gehende Tangente Tt durch Construction zu finden: Man ziehe nämlich nach M einen Radius vector, FM, und verlängere ihn um den andern, so dass MG = F′M, ziehe F′G und fälle hierauf das Perpendikel ML, so ist dieses die verlangte Tangente.

Wäre umgekehrt, statt des Berührungspuncts M, ein ausserhalb der Ellipse liegender Punct, H, gegeben, durch welchen die Tangente gehen soll, so kommt es nur darauf an, einen Punct, G, zu finden, der von M um den einen Leitstrahl, F′M, und von F um die Summe beider entfernt ist. Diesen Punct G findet man aber in dem Durchschnitt der beiden aus H mit F′H und aus F mit AB beschriebenen Bögen: ziehe dann F′G und fälle darauf von H das Perpendikel HL (vergl. § 45).

51.

* **Lehrsatz.** Der Flächeninhalt F einer Ellipse ist gleich π mal dem Product aus der halben grossen und halben kleinen Achse. In Zeichen:

$$F = ab\pi$$

Beweis. Denkt man sich über die grosse Achse AB = 2a einen Kreis beschrieben, so sind die Gleichungen dieses Kreises und der Ellipse

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

und man sieht, dass jede Ordinate der Ellipse, wie MP, aus der zu derselben Abscisse gehörenden Ordinate NP des Kreises er-

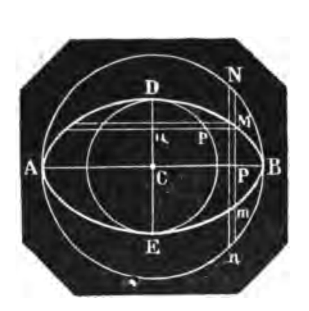
halten wird, indem man letztere $\frac{b}{a}$ mal nimmt, $MP = \frac{b}{a} \cdot NP$. Dasselbe muss nun offenbar auch von der Summe aller Ordinaten oder parallelen Sehnen, Mm, Nn, oder, indem man sich statt dieser unendlich schmale Rechtecke denkt, von den Flächen selbst gelten. Die Fläche des Kreises ist nun bekanntlich $= a^2 \pi$, folglich die Fläche der Ellipse $= \frac{b}{a} \cdot a^2 \pi = a b \pi$.

52.

* **Lehrsatz.** Wenn eine Ellipse sich um ihre kleine Achse dreht, so beschreibt sie einen Körper, das sogenannte Ellipsoid (oder elliptisch abgeplattete Sphäroid), dessen Volumen, V, gleich $\frac{4}{3}\pi$mal dem Product aus der halben kleinen Achse (b) in das Quadrat der halben grossen Achse (a^2) ist. In Zeichen:

$$V = \frac{4}{3} a^2 b \pi.$$

Beweis. Ueber die kleine Achse sei ein Kreis gezeichnet, so beschreibt derselbe eine Kugel, deren Volumen bekanntlich $= \frac{4}{3} b^3 \pi$. Die Ordinate pQ des Kreises beschreibt eine Kreisfläche, deren Inhalt $= pQ^2 \cdot \pi$ Die Ordinate der Ellipse $MQ = \frac{a}{b} \cdot pQ$ aber eine Kreisfläche, deren Inhalt $= MQ^2 \pi = \frac{a^2}{b^2} pQ^2 \cdot \pi$. Es verhalten sich also die beiden von den Ordinaten pQ und MQ beschriebenen Kreisflächen wie $1 : \frac{a^2}{b^2}$ und da dies Verhältniss von je zwei andern, zu einerlei Abscisse gehörenden Ordinaten beschriebenen Kreisflächen (Durchschnitte der Kugel und des Ellipsoids), also auch von der Summe aller unmittelbar auf einander folgenden Durchschnitte der Kugel und des Ellipsoids gilt, so muss es offenbar auch (indem man sich statt der Durchschnitte unendlich dünne Cylinder denkt) von diesen Körpern selbst gelten. Folglich ist das Volumen des Ellipsoids $\frac{a^2}{b^2}$ mal so gross, als das der Kugel, mithin $V = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{4}{3} b^3 \pi = \frac{4}{3} a^2 b \pi$.



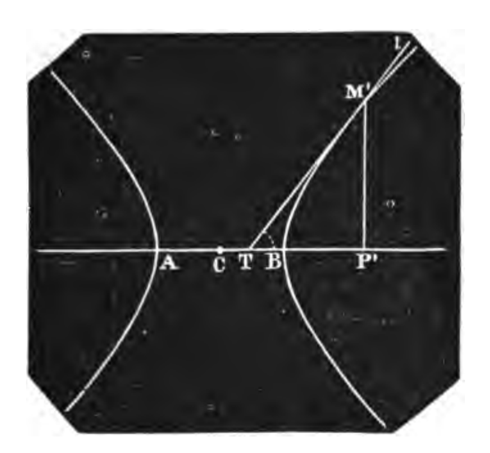
Anmerkung. Dreht sich die Ellipse statt um die **kleine**, um die **grosse** Achse, so ist das Volumen des erzeugten Ellipsoids

(wie man durch ähnliche Betrachtungen findet) nur $= \frac{4}{3} ab^2 \pi$ Ellipsoide, welche durch Naturkräfte entstanden, sind aber alle von ersterer Art, weil die Schwungkraft dieselbe an den Polen (Endpuncten der Drehachse) abplattet.

IV. Tangenten an der Hyperbel.

53.

Aufgabe. Es ist eine Hyperbel durch ihre Gleichung und ein Berührungspunct durch seine Coordinaten gegeben. Man sucht die Gleichung der durch diesen Punct gehenden Tangentiallinie.



Auflösung. Die gegebene Gleichung der Hyperbel sei:

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

und M' (x', y') der gegebene Berührungspunct.

Die Gleichung der durch M' (x', y') und einen zweiten Punct M'' (x'', y''), gehenden Sekante ist:

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x') \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Laut Bedingung der Gleichung (1):

$$a^2 y'^2 = b^2 x'^2 - a^2 b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$a^2 y''^2 = b^2 x''^2 - a^2 b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Aus (3) und (4) hat man:

$$\frac{y'-y''}{x'-x''}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x'+x''}{y'+y''}$$

Mithin ist die gesuchte Gleichung der Tangentiallinie T*t*:

$$y-y'=\frac{b^2x'}{a^2y'}(x-x') \dots\dots\dots\dots (5)$$

$$\text{oder: } a^2y'y-b^2x'x=-a^2b^2 \dots\dots\dots (6)$$

Wegen Aehnlichkeit unter den Gleichungen der Ellipse und Hyperbel hätte man (5) und (6) auch aus (5) und (6) des § 47 erhalten können, indem man in letztere $-b^2$ statt $+b^2$ setzt.

Die Gleichung (6) giebt für $y=0$ die Abscisse des Durchschnittspuncts T, nämlich:

$$x=\frac{a^2}{x'}=\text{CT} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (7)$$

$$S_t=x'-x=x'-\frac{a^2}{x'} \dots\dots\dots\dots\dots (8)$$

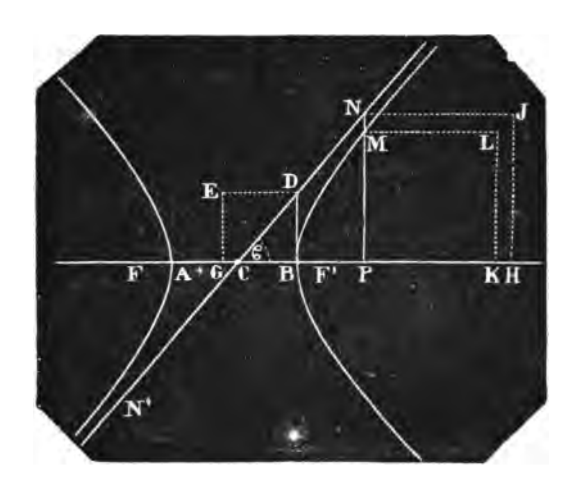
Aus dem Ausdrucke (7) folgt, als eine merkwürdige Eigenschaft der Hyperbel, dass der Durchschnittspunct T, der an irgend einen Punct, M', der Hyperbel BM' gezogenen Tangente immer zwischen C und B, als die äussersten Grenzen, fällt. Denn x' kann nie kleiner als a sein (weil für $x'<a$ die Ordinate imaginär wird). Für $x'=a$ aber ist $\text{CT}=a$; $y'=0$; $\frac{b^2x'}{a^2y'}=\infty$; Subtg. $=0$. Die Tangente am Scheitel B steht senkrecht auf der Achse. Für grösser werdende x' rückt der Punct T immer näher an den Mittelpunct, ohne ihn zu erreichen. Man könnte schon hieraus folgern, dass es nicht möglich ist, aus dem Mittelpunct eine Tangente an die Hyperbel zu ziehen, so wie auch keine Linie, welche beide entgegengesetzte Hyperbeln zugleich berührt, oder auch nur die eine berührte und die andere schnitte. Wir wollen jedoch diesen merkwürdigen Umstand im folgenden § umständlicher besprechen.

Zusatz. Zieht man nach dem Berührungspunct M' die beiden Leitstrahlen FM', F'M', so lässt sich ganz so wie in § 50 (oder indem man blos in den dortigen Formeln $-b^2$ statt $+b^2$ setzt) zeigen, dass die Winkel, welche sie mit der Tangente machen, gleich sind.

54.

Aufgabe. Man fragt, wie gross der Winkel $\mathfrak{C}$ sein muss, den eine durch den Mittelpunct einer Hyperbel gehende grade

Linie, NN', mit der Achse macht, damit diese grade Linie die Hyperbel 1) schneidet, 2) nicht schneidet und 3) berührt.



Auflösung. Für $CP = x$, $MP = y$, $NP = \text{y}$ ist die Gleichung der Hyperbel:

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

und die der graden Linie NN':

$$\text{y} = \operatorname{tg} \epsilon \cdot x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Um die Abscisse x des etwaigen Durchschnittspuncts zu finden, für welchen $\text{y} = y$ sein muss, setzen wir (§ 15):

$$\frac{b^2 x^2 - a^2 b^2}{a^2} = (\operatorname{tg} \epsilon \cdot x)^2$$

hieraus folgt:

$$x = \frac{ab}{\sqrt{(b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \epsilon)}} \quad \ldots\ldots (3)$$

1) Nimmt man nun ϵ so gross, dass

$$a^2 \operatorname{tg}^2 \epsilon > b^2$$

$$\text{oder:} \quad \operatorname{tg} \epsilon > \frac{b}{a}$$

so wird in (3) die Abscisse x imaginär. Für ein solches ϵ können die Linien sich also nicht schneiden.

2) Nimmt man aber ϵ so klein, dass:

$$\operatorname{tg}\mathfrak{C} < \frac{b}{a}$$

so giebt die Gleichung (3), wegen des doppelten Vorzeichens, zwei Werthe für x, und die Linie NN′ schneidet dann beide Hyperbeln; dass sie dieselben wirklich schneidet, und bei ihrem fernern Laufe innerhalb derselben bleibt, ist bewiesen, wenn man zeigt, dass die Differenz der Ordinaten $\mathrm{y}-y$, welche bis zum Durchschnittspunct positiv ist, von da an negativ wird. Diese Differenz ist nun:

$$\mathrm{y}-y=\operatorname{tg}\mathfrak{C}\cdot x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

und wird und bleibt offenbar negativ, sobald:

$$\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}>\operatorname{tg}\mathfrak{C}\cdot x$$

$$\text{oder: } x>\frac{ab}{\sqrt{(b^2-a^2\operatorname{tg}^2\mathfrak{C})}}$$

3) Nimmt man endlich noch den Winkel $\mathfrak{C}$ so, dass

$$\operatorname{tg}\mathfrak{C}=\frac{b}{a}$$

so wird in (3) die Abscisse:

$$x=\frac{\pm ab}{0}=\pm\infty$$

55.

Wenn also aus dem Mittelpunct einer Hyperbel eine grade Linie, NN′, unter einem solchen Winkel, $\mathfrak{C}$, gezogen wird, dass $\operatorname{tg}\mathfrak{C}=\frac{b}{a}=$ dem Quotienten der halben zweiten, durch die halbe erste Achse dividirt, und folglich ihre Gleichung:

$$\mathrm{y}=\frac{b}{a}\cdot x$$

ist, so trifft diese Linie mit den Hyperbeln erst im Unendlichen zusammen.*)

*) Hier sieht man nun auch die Nothwendigkeit ein, weshalb bei der Construction der Hyperbel nach der Polargleichung § 42 der Radius vector von $+\infty$ plötzlich in $-\infty$ umschlagen muss.

Nun lehrt aber schon die Metaphysik, dass wenn zwei Dinge erst im Unendlichen zusammentreffen, sie dann gar nicht zusammentreffen, weil sonst das Unendliche zugleich ein Ende haben, begrenzt sein, folglich einen Widerspruch enthalten würde.

Wir können jedoch diesen etwas unbefriedigt lassenden metaphysischen Schluss (wie alle solche sind), dass nämlich die grade Linie $\mathrm{y} = \frac{b}{a} \cdot x$ immer ganz ausserhalb der Hyperbeln bleibt, niemals mit ihnen zusammentreffen kann, durch Analysis bündiger machen, indem wir darthun, dass die Differenz der Ordinaten beider Linien, nämlich:

$$\mathrm{y} - y = \frac{b}{a} \cdot x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \ldots\ldots\ldots (4)$$

immer positiv ist. Weil nämlich:

$$x^2 > x^2 - a^2$$

so ist auch: $x > \sqrt{x^2 - a^2}$

$$\frac{b}{a} x > \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

oder: $\mathrm{y} > y$

Die Gleichung (4) lässt sich auch so schreiben:

$$\mathrm{y} - y = \frac{b}{a} x - \frac{b}{a} x \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)} \ldots\ldots (5)$$

und hieraus schliessen wir, dass besagte Differenz mit wachsendem x immer kleiner und kleiner wird, ohne jedoch ganz zu verschwinden; mit andern Worten, dass die grade Linie sich der Hyperbel immer mehr und mehr nähert. Denn je grösser x, je grösser der Factor $\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)}$, der, weil dann von 1 immer weniger subtrahirt wird, sich der Einheit nähert, so dass also die Hyperbel zwar mit immer schwächerer Krümmung in eine grade Linie auszulaufen bestrebt ist, es aber nie kann.

Um den Einwand zu beseitigen, dass für $x = \infty$, in (4) a^2 gegen x^2 verschwinde, oder in (5) der Factor $\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)} = 1$ werde, und zugleich zu zeigen, dass man unendlich grosse (oder kleine) Grössen nur mit grosser Vorsicht gebrauchen darf, nehmen wir die Differenz der Quadrate beider zu einerlei Abscisse gehörenden Ordinaten. Diese ist:

$$\mathrm{y}^2 - y^2 = \left(\frac{b}{a}\cdot x\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\cdot \sqrt{x^2 - a^2}\right)^2$$

$$\mathrm{y}^2 - y^2 = b^2$$

also der merkwürdige Satz, dass diese Differenz von der Grösse der Abscisse ganz unabhängig, immer dieselbe und gleich dem Quadrate der halben zweiten Achse ist, nämlich:

Fläche: EDBG = Fläche: NJHKLM

Weil nun diese Differenz $\mathrm{y}^2 - y^2$ für jede noch so grosse Abscisse beständig dieselbe bleibt, so können die Ordinaten y, y nie gleich werden, also auch die Linien nie zusammentreffen, wie klein auch die Differenz $\mathrm{y} - y$ werden mag. Die grade immer ausserhalb der Hyperbel bleibende Linie $\mathrm{y} = \frac{b}{a} x$ kann also auch keine Tangente sein. Zwei Puncte, die sich neben einander, der eine in der graden Linie $\mathrm{y} = \frac{b}{a} x$, der andere in der Hyperbel, bewegen, treffen in aller Ewigkeit nicht zusammen, obgleich sie sich immer näher kommen.

56.

Erklärung. Eine grade (oder krumme) Linie, welcher sich eine krumme Linie ohne Aufhören nähert, ohne sie jedoch je zu erreichen, nennt man eine **Asymptote**.

Die Hyperbel hat also zwei solche gradlinigte Asymptoten, die sich sehr leicht construiren lassen.

Man errichte nämlich in den Scheiteln Perpendikel, BD = AG = der zweiten halben Achse $b = \sqrt{e^2 - a^2}$, so sind die durch C, D und C, G gehenden graden Linien NN′, nn' die Asymptoten, und ihre Gleichung:

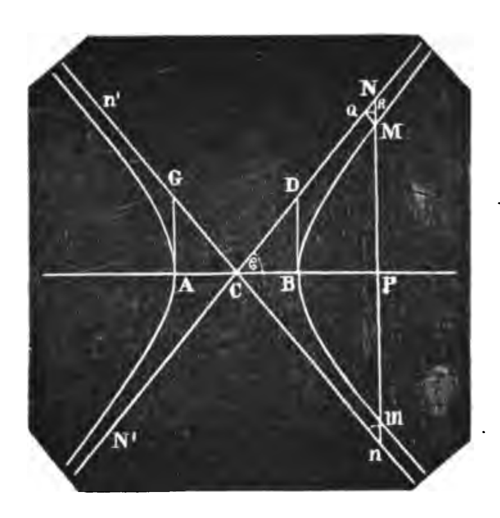
$$\mathrm{y} = \pm \frac{b}{a} x$$

Der Winkel N Cn, den zwei Asymptoten machen, heisst der **Asymptotenwinkel**, und dieser ist für die sogenannte gleichseitige Hyperbel, in welcher $b = a$, ein rechter.

Zusatz. Jede zwischen dem Scheitel- und Mittelpunct mit der Asymptote parallel gezogene Linie muss die Hyperbel schneiden.

57.

Aufgabe. Die Gleichung der Hyperbel zu finden, wenn die Abscissen auf der einen Asymptote, CN, und die Ordinaten parallel mit der andern genommen werden, folglich der Coordinatenwinkel dem Asymptotenwinkel gleich ist.



Auflösung. Die gewöhnliche Gleichung der Hyperbel ist:

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \text{ ....} (1)$$

und für den halben Asymptotenwinkel θ ist:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$$

Ist nun MQ parallel nn', und setzt man:

Die neue Abscisse $CQ = t$
„ „ Ordinate $MQ = u$

so kann man den Zusammenhang dieser neuen Coordinaten folgendermassen leicht aus den alten finden.

Das Dreieck MQN ist gleichschenklig, weil Winkel M = N (= n), folglich:

$$QN = MQ = u$$
$$CN = CQ + QN = t + u$$
$$CP = x = (t+u)\cos\theta$$
$$MP = y = (t+u)\sin\theta - 2u\sin\theta$$
oder: $$y = (t-u)\sin\theta$$

Diese Werthe von x und y in die Gleichung (1) substituirt kommt:

$$a^2 (t-u)^2 \sin^2 \varepsilon - b^2 (t+u)^2 \cos^2 \varepsilon = -a^2 b^2$$

Durch $\cos^2 \varepsilon$ dividirt und beachtet, dass: $\operatorname{tg}^2 \varepsilon = \frac{b^2}{a^2}$ und folglich (wie auch schon die Figur zeigt) $\cos^2 \varepsilon = \frac{a^2}{a^2+b^2}$ kommt:

$$a^2 (t-u)^2 \cdot \frac{b^2}{a^2} - b^2 (t+u)^2 = -a^2 b^2 \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2}$$

$$ut = \frac{a^2+b^2}{4}$$

oder wenn man, der Kürze wegen, die Grösse $\frac{a^2+b^2}{4} = m^2$ setzt, so ist:

$$ut = m^2$$

$$u = \frac{m^2}{t}$$

die höchst einfache, auf die Asymptoten bezogene Gleichung der Hyperbel. Ist dieselbe eine gleichseitige, so ist $b = a$ und

$$u = \frac{\frac{1}{2} a^2}{t} \text{ (s. S. 22, 2)}$$

Viertes Buch.

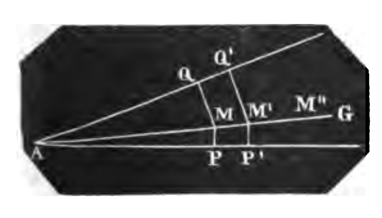
Von den geometrischen Oertern.

58.

Erklärung. Innerhalb der Schenkel eines Winkels, A, giebt es gewiss einen so gelegenen Punct, M, dass die von ihm auf die Schenkel gefällten Perpendikel MP, MQ ein bestimmtes Verhältniss zu einander haben, z. B. dass MQ $n$mal so gross, als MP ist.

Man sieht aber sogleich, dass, wenn die Lage oder der Ort eines solchen Puncts, M, gefunden wäre, dieser Punct M nicht der einzig mögliche ist, dass es vielmehr noch unzählig andere Puncte, M', M''..., von derselben Beschaffenheit giebt, und dass sie alle in einer durch M und den Scheitel A gehenden graden Linie, AG, liegen, denn vermöge Aehnlichkeit der Vierecke APMQ, AP'M'Q'... hat man:

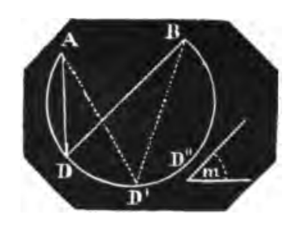
$$MP : MQ = M'P' : M'Q' = \ldots.$$



Man nennt deshalb die ganze Linie AG, in welcher alle möglichen Puncte von der erwähnten Beschaffenheit liegen, den g e o m e t r i s c h e n O r t derselben.

So wie nun hier die grade Linie, so können auch in vielen anderen Fällen bestimmte krumme Linien die Lagen gewisser Puncte von bestimmter Eigenschaft enthalten, und deshalb die geometrischen Oerter derselben sein.

So giebt es z. B. gewiss einen Punct, D, von solcher Beschaffenheit, dass, wenn er mit zwei andern gegebenen Puncten, A und B, verbunden wird, der entstehende Winkel ADB einem gegebenen Winkel, m, gleich wird.

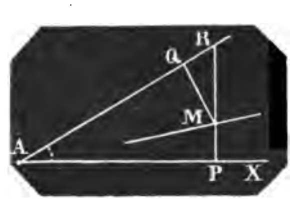


Allein dieser Punct D ist wiederum nicht der einzige allein mögliche; es giebt ausser ihm noch unzählige, D', D''..., von derselben Beschaffenheit, und sie liegen (wenn man sich aus der Elementar-Geometrie erinnert, dass alle Peripheriewinkel auf einerlei Bogen einander gleich sind) bekanntlich alle im Umfange eines gewissen Kreisbogens, ADD'...B, der also, der Erklärung gemäss, der geometrische Ort derselben ist.

Die Auffindung geometrischer Oerter ist nun unter den mannigfaltigen und wichtigen mathematischen Problemen ein solches, bei welchem die Sprache der Analysis ein mächtiges Mittel und Werkzeug der Entdeckung wird. Und es ist begreiflich, dass, wenn ein zu suchender geometrischer Ort keine grade Linie und kein Kreis ist, die Euclidische Geometrie, welche nur diese beiden Linien kennt, uns immer im Stiche lassen würde. Die grössere Kraft und Methode der Analysis bei dieser Art geometrischer Aufgaben werden wir aus dem folgenden, umständlich behandelten Beispiele kennen lernen.

59.

Aufgabe. Es ist ein Winkel, RAX = A, gegeben. Innerhalb der Schenkel einen Punct, M, so zu bestimmen, dass die von ihm auf die Schenkel gefällten Perpendikel MP, MQ sich wie $1 : n$ verhalten, also $MQ = n \cdot MP$ ist.



Auflösung. Nehmen wir, um die Lage des gesuchten Puncts M durch Coordinaten zu bestimmen, den einen Schenkel, AX, zur Abscissenlinie und A zum Anfangspunct, und setzen also:

$$AP = x, \; MP = y$$

so kommt es nur darauf an, auch das Perpendikel MQ durch x, y und A auszudrücken. Dies ist leicht, denn:

$$\begin{aligned} QMR &= RAX = A \\ RP &= \operatorname{tg} A \cdot x \\ RM &= \operatorname{tg} A \cdot x - y \\ MQ &= RM \cdot \cos A \\ \text{also:} \quad MQ &= \cos A\,(\operatorname{tg} A \cdot x - y) \end{aligned}$$

da nun laut Bedingung:

$$MP : MQ = 1 : n$$

so hat man: $y : \cos A\,(\operatorname{tg} A \cdot x - y) = 1 : n \ldots\ldots\ldots (1)$

$$ny = \sin A \cdot x - \cos A \cdot y$$

$$y = \frac{\sin A}{n + \cos A} \cdot x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

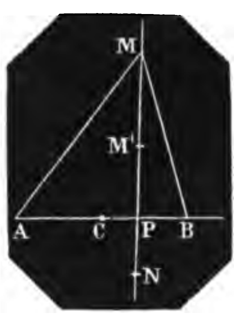
Vermöge dieser Gleichung sind die beiden unbekannten Coordinaten x, y an einander gebunden, und die eine, z. B. y, durch die andere x bestimmt. Weil aber diese zweite Grösse x durch nichts bestimmt ist (indem nur die eine Gleichung (2) vorhanden), so bleibt, um einen Punct, M, von der angegebenen Beschaffenheit zu erhalten, nichts übrig, als für die eine unbekannte, x, einen beliebigen Werth anzunehmen, und den sofort dadurch bestimmten Werth von y aus (2) zu berechnen. Da nun aber je zwei andere zusammengehörige Werthe von x, y aus der Gleichung (2) der Gleichung (1), also auch der Aufgabe Genüge leisten, und wegen der unbegrenzten Willkür, in welcher die Annahme von x liegt, stetig auf einander folgen können, so sieht man, dass es nothwendig auch eine stetige Folge, also eine zahllose Menge von Puncten giebt, welche der Aufgabe Genüge leisten. Um sie alle zu finden, suchen wir ihren geometrischen Ort, d. h. die räumliche Bedeutung der Gleichung:

$$y = \frac{\sin A}{n + \cos A} \cdot x$$

Diese ist aber, wegen des beständigen Coefficienten von x, die aus der vorhergehenden Theorie bereits bekannte Gleichung einer graden Linie, welche die Abscissenlinie im Anfangspunct A unter einem Winkel schneidet, dessen Tangente $= \frac{\sin A}{n + \cos A}$ (§ 4). Diese Linie oder ihre Gleichung ist also der gesuchte geometrische Ort des fraglichen Puncts.

60.

Aufgabe. Es ist der Abstand zweier Puncte, A, B, gegeben, nämlich $AB = a$. Man sucht den geometrischen Ort eines dritten Puncts, M, so dass, wenn er mit A und B verbunden wird, die Differenz der Quadrate dieser Verbindungslinien einem gegebenen Quadrate, b^2, gleich ist ($AM^2 - BM^2 = b^2$).



Auflösung. Nimmt man AB als Abscissenrichtung und A zum Anfangspunct, so ist für den gesuchten Punct M (x, y):

$$AP = x;\ MP = y$$
$$PB = a - x$$
$$AM^2 = y^2 + x^2$$
$$BM^2 = y^2 + (a-x)^2$$

daher laut Bedingung:

$$y^2 + x^2 - [y^2 + (a-x)^2] = b^2$$

hieraus: $$x = \frac{a^2 + b^2}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Da y ganz herausgefallen, so sieht man, dass die Lage des Puncts M von y ganz unabhängig ist. Nimmt man nur:

$$AP = x = \frac{a^2 + b^2}{2a}$$

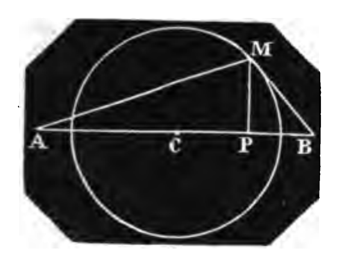
und errichtet in P eine Senkrechte, MN, so hat jeder Punct in dieser Senkrechten die verlangte Eigenschaft. Obige Gleichung (1), welche man auch so schreiben kann:

$$x = 0 \cdot y + \frac{a^2 + b^2}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ist die einer, im Abstande $= \frac{a^2 + b^2}{2a}$ mit der Ordinaten-Achse YY parallelen Linie (§ 8, 2). Wäre $b = a$, und folglich $x = a$, so ginge diese Linie durch den Punct B.

61.

Aufgabe. Es sei wieder der Abstand zweier Puncte, A, B, gegeben, $AB = 2a$. Man suche den geometrischen Ort eines dritten Puncts, M, von der Beschaffenheit, dass, wenn er mit A und B verbunden wird, die Summe der Quadrate dieser Verbindungslinien einem gegebenen Quadrate (b^2) gleich sei ($AM^2 + BM^2 = b^2$).



Auflösung. Nimmt man AB als Abscissenrichtung, die Mitte C zum Anfangspunct, so ist für den fraglichen Punct M (x, y):

$$CP = x, \quad MP = y$$
$$AP = a + x, \quad BP = a - x$$
$$AM^2 = y^2 + (a + x)^2$$
$$BM^2 = y^2 + (a - x)^2$$
$$y^2 + (a + x)^2 + y^2 + (a - x)^2 = b^2$$
$$y^2 = (\tfrac{1}{2} b^2 - a^2) - x^2$$

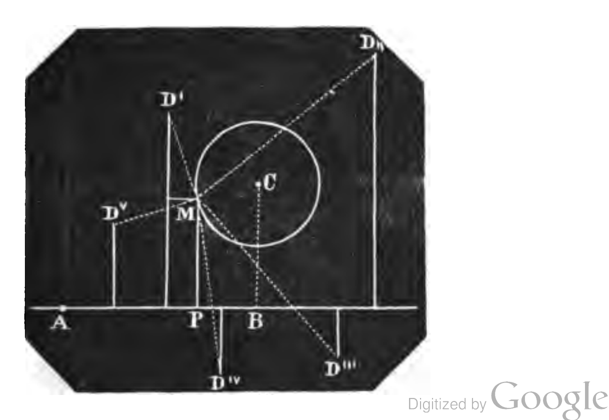
Dies ist die bekannte Mittelpunctsgleichung eines Kreises, dessen Mittelpunct C, dessen Radius $r = \sqrt{(\frac{1}{2}b^2 - a^2)}$. Beschreibt man also mit diesem Radius aus C einen Kreis, so haben alle Puncte desselben die verlangte Eigenschaft. Wäre $a^2 > \frac{1}{2} b^2$, so gäbe es keinen Kreis, die Aufgabe wäre dann unlösbar. Wäre $a^2 = \frac{1}{2} b^2$, so wäre C (0, 0) der verlangte Punct.

Für $b = 2a$ wird der Radius $r = a =$ CA, und folglich AB der Durchmesser des Kreises.

62.

Aufgabe. Es sind die Lagen (Coordinaten) einer beliebigen Anzahl Puncte gegeben; nämlich: D' $(a'\ b')$, D'' (a'', b''), D''' (a''', b''')... Man sucht den geometrischen Ort eines Punctes, M (x, y), von der Beschaffenheit, dass, wenn er mit allen gegebenen Puncten, D', D''..., verbunden wird, die Summe der Quadrate dieser Verbindungslinien gleich einer gegebenen Grösse, d^2, sei, so nämlich, dass:

$$MD'^2 + MD''^2 + MD'''^2 + \ldots = d^2$$



Auflösung. Ist A der gemeinschaftliche Anfangspunct, so ist für den fraglichen Punct M (x, y):

$$AP = x,\ MP = y$$
$$MD'^2 = (y - b')^2 + (x - a')^2$$
$$MD''^2 = (y - b'')^2 + (x - a'')^2$$
$$MD'''^2 = (y - b''')^2 + (x - a''')^2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Ist nun die Anzahl der gegebenen Puncte $= n$, so muss, wenn man die vorstehenden Quadrate entwickelt und addirt:

$$ny^2 + nx^2 - 2(b' + b'' + b''' + \ldots).y - 2(a' + a'' + a''' + \ldots).x + a'^2 + a''^2 + \ldots + b'^2 + b''^2 + \ldots = d^2$$

sein, oder wenn man, der Kürze wegen, die Summen von:

$$b' + b'' + b''' + \ldots\ldots\ldots = \Sigma(b)$$
$$a' + a'' + a''' + \ldots\ldots\ldots = \Sigma(a)$$
$$b'^2 + b''^2 + b'''^2 + \ldots\ldots = \Sigma(b^2)$$
$$a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \ldots\ldots = \Sigma(a^2)$$

setzt und durch n dividirt etc.:

$$y^2 + x^2 - \frac{2\Sigma(b)}{n} \cdot y - \frac{2\Sigma(a)}{n} \cdot x = \frac{d^2 - \Sigma(b^2) - \Sigma(a^2)}{n}$$

Dies ist offenbar die Gleichung eines Kreises, als der gesuchte geometrische Ort. Die Coordinaten des Mittelpuncts C sind (§ 20):

$$AB = \frac{\Sigma(a)}{n},\quad BC = \frac{\Sigma(b)}{n}$$

und der Radius $CM = \sqrt{\left(\frac{d^2 - \Sigma(b^2) - \Sigma(a^2)}{n} + \left[\frac{\Sigma b}{n}\right]^2 + \left[\frac{\Sigma a}{n}\right]^2\right)}$

63.

Aufgabe. Es ist der Abstand zweier Puncte, A, B, gegeben, $AB = 2a$. Man sucht den geometrischen Ort eines dritten Puncts, M (x, y), von der Beschaffenheit, dass die von A und B nach ihm gezogenen Linien einen bestimmten Winkel, $AMB = m$, mit einander machen.

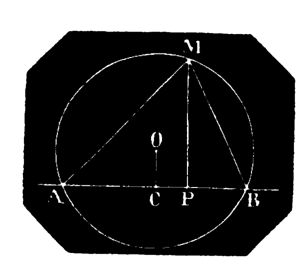
Auflösung. Nimmt man C, Mitte von AB, zum Anfangspunct, und setzt einstweilen $AMP = \varphi$, $BMP = \psi$, so ist: $m = \varphi + \psi$ und

$$\operatorname{tg} m = \operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi}{1 - \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\psi} \ldots\ldots (1)$$

hierin ist: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a+x}{y}$, $\operatorname{tg}\psi = \frac{a-x}{y}$ .... (2)

folglich: $$\operatorname{tg} m = \frac{\frac{a+x}{y} + \frac{a-x}{y}}{1 - \frac{a+x}{y} \cdot \frac{a-x}{y}} \quad \ldots\ldots (3)$$

$$y^2 + x^2 - \frac{2a}{\operatorname{tg} m} \cdot y = a^2 \quad \ldots\ldots (4)$$



Der gesuchte geometrische Ort ist folglich ein Kreis, dessen Mittelpuncts-Coordinaten und Radius vollkommen bestimmt sind, nämlich: O $\left(o, \frac{a}{\operatorname{tg} m}\right)$, $OM = \sqrt{\left(a^2 + \frac{a^2}{\operatorname{tg}^2 m}\right)} = \frac{a}{\sin m}$.

Anmerkung. 1) Die Ausdrücke 1, 2, 3 gestalten sich anders, wenn die Ordinate MP ausserhalb der Schenkel des Winkels AMB fällt. Die Gleichung 4 bleibt aber dieselbe.

2) Damit die Vorzeichen in (4), also die Gleichung nicht geändert wird, darf von den beiden Werthen von y nur der positive genommen werden. Deshalb ist auch nicht der ganze Kreis, sondern nur der oberhalb AB liegende Bogen der gesuchte geometrische Ort.

3) Soll der gegebene Winkel $m = 90^0$ sein, so ist $\operatorname{tg} m = \infty$, und die Gleichung (4) verwandelt sich in $y^2 + x^2 = a^2$. Dann ist C der Mittelpunct, und AB der Durchmesser.

Anmerkung. Zu den Aufgaben über geometrische Oerter können auch die §§ 24, 31, 39 gezählt werden.

64.

Aufgabe. Zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels bewegt sich eine grade Linie, GH, so, dass ihre Endpuncte G und H an denselben hingleiten, und folglich die Linie Anfangs mit dem einen Schenkel, AY, zusammenfallend, zuletzt auf dem andern Schenkel AX zu liegen kommt. Man suche die krumme Linie, welche ein bestimmter, in GH angenommener Punct, M, beschreibt.

Auflösung. Seien die beiden beständigen Theile der Linie GH:



$$GM = a,\ HM = b$$
und $AP = x,\ MP = y$

so ist, wenn man $GHA = \varphi$ setzt:

$$y = b \sin \varphi$$
$$x = a \cos \varphi$$

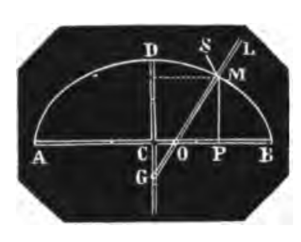
hieraus (weil $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$)

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Der Punct M beschreibt also einen Theil einer Ellipse, deren halbe grosse Achse $AB = a$, und deren halbe kleine Achse $AD = b$ ist. Wäre $a = b$, so beschriebe der Punct M einen Kreis.

Anmerkung. Diese ursprünglich ganz müssige und nur zur Uebung dienende Aufgabe hat wahrscheinlich die Erfindung folgendes sinnreichen Instruments, des sogenannten elliptischen Zirkels, veranlasst, mit welchem man Ellipsen fast eben so leicht und genau, als Kreise mit dem Zirkel beschreiben kann.



Man stelle sich vor, ein Lineal, GL, werde gleichsam um zwei bewegliche Mittelpuncte, G, O, gedreht, die bei gleichbleibendem Abstande derselben gezwungen sind, zwischen zwei sich rechtwinklig kreuzenden Leisten zu gleiten. Alsdann wird ein irgendwo in dem Lineal GL befestigter Zeichnenstift, SM, eine Ellipse beschreiben, deren halbe grosse Achse $CB = GM$, und deren halbe kleine Achse $CD = OM$ ist, und deren beider Verhältniss sich durch gehörige Stellung der Puncte O und M auf mannigfache Weise abändern und einem gegebenen gleichmachen lässt.

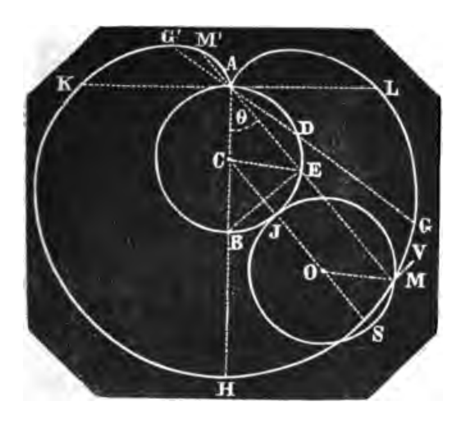
Sei, um die Richtigkeit einzusehen, die für eine bestimmte Stellung der Puncte O, M, bei der Umdrehung des Lineals GL, beständig bleibende Länge $MG = a$, $MO = b$, so ist für $CP = x$, $MP = y$, wenn man $DGM = \varphi$, und folglich $MOP = 90 - \varphi$ setzt:

$$x = a \sin \varphi$$
$$y = b \cos \varphi$$

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

65.

* **Aufgabe.** In einem Kreise, dessen Radius AC $= a$, sind alle durch den Endpunct A des Durchmessers gehenden Sehnen AD, AE ... verlängert, und von den Durchschnittspuncten D, E... aus der Durchmesser AB $= 2a$ auf die Verlängerungen, sowohl vorwärts als rückwärts abgesteckt, so dass DG $=$ DG′, EM $=$ EM′, BH $=$ BA etc. Man sucht den geometrischen Ort (die Gleichung der krummen Linie), in welchem alle diese Puncte, G, G′, M, M′, K.., liegen.



Auflösung. Am leichtesten ist die Polargleichung zu finden. Nimmt man den Punct A als Pol, AH als den festen Schenkel des veränderl. Winkels MAH $= \theta$ und setzt den Radius vector AM $= \varrho$, so ist, wenn man noch BE gezogen denkt, die Sehne AE $= 2a \cdot \cos\theta$, folglich, indem man zu dieser Sehne $2a$ addirt und davon subtrahirt:

$$\varrho = 2a \cos\theta \pm 2a.$$

Wenn man CS parallel mit AM zieht, JO $=$ CJ nimmt, und mit OJ aus O einen Kreis beschreibt, so muss dieser nothwendig durch M gehen, und Bogen AEJ $=$ Bogen JM sein. Denn denkt man noch CE gezogen, so ist offenbar das Viereck CEMO ein Parallelogramm, folglich OM $=$ CE $= a$; ferner findet man, dass Winkel ACJ $=$ JOM, folglich Bogen AJ $=$ JM.

Man kann sich daher vorstellen, der Kreis O wälze sich auf dem festen Kreise C, alsdann wird offenbar der anfänglich auf A liegende Punct M (in welchem man sich einen Zeichnenstift, MV, befestigt denkt) beim Fortwälzen des Kreises C alle Puncte, wie A, L, G, M... durchlaufen, mithin die fragliche krumme Linie, welche man Cardioide (Herzlinie) nennt, beschreiben. Wenn ein beliebiger Kreis sich auf einem andern festen Kreise wälzt, so wird ein Punct im Umfange des erstern immer eine gesetzmässige krumme Linie beschreiben. Jede auf solche Weise entstehende Linie heisst ein Epicicloide. Ist der wälzende Kreis dem ruhenden gleich, so entsteht die Cardioide, welche mithin

eben so als ein besonderer Fall zum Geschlecht der Epicicloiden gehört, wie der Kreis ein besonderer Fall der Ellipsen ist.

Die Cardioide wird auch von der Natur construirt, und man kann sie in schönem goldenen Lichte wahrnehmen, wenn man das Sonnenlicht (selbst Kerzenlicht) in einen spiegelnden Cylinder, z. B. in eine blanke Uhrfeder, auf ebenem weissen Papier liegend, möglich parallel mit dem Papier einfallen lässt. Jede durch Spiegelung vor einer krummen Fläche entstehende Lichtlinie heisst allgemein eine Brennlinie (Catacaustica). Die Cardioide ist also auch die Brennlinie des Kreises.

66.

* **Aufgabe.** Es ist der Abstand zweier Puncte, $AB = 2a$, gegeben. Man sucht den geometrischen Ort eines dritten Punctes, M (x, y), von der Beschaffenheit, dass das Product aus seinen beiden Abständen von A und B einer gegebenen Zahl, b^2, gleich ist. In Zeichen: $AM \cdot BM = b^2$.

Auflösung. Die Mitte C von AB sei Anfangspunct der Coordinaten, $CP = x$, $MP = y$, so ist:

$$AM^2 = y^2 + (a + x)^2,\ BM^2 = y^2 + (a - x)^2.$$

Mithin laut Bedingung: $\sqrt{y^2 + (a + x)^2} \cdot \sqrt{y^2 + (a - x)^2} = b^2$.

Aus dieser Gleichung folgt (Seite 24, E):

$$y = \pm\sqrt{-(a^2 + x^2) \pm \sqrt{b^4 + 4a^2x^2}} \ldots\ldots\ldots (1)^{*)}$$

Für y erhalten wir vier Werthe (Wurzeln), wovon jedoch allemal die zwei, dem untern Zeichen von $\pm$ in der Klammer entsprechenden, imaginär sind. Wir brauchen deshalb nur folgende Gleichung zu untersuchen:

$$y = \pm\sqrt{-(a^2 + x^2) + \sqrt{b^4 + 4a^2x^2}} \ldots\ldots\ldots (2)$$

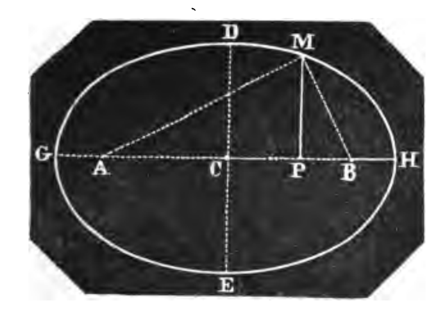
Aus dem doppelten Vorzeichen und der graden Potenz von x erhellt sogleich, dass der gesuchte geometrische Ort jedenfalls durch jede der Coordinaten-Achsen in zwei gleiche Hälften getheilt sein würde. Um jedoch die Gestalt näher kennen zu lernen, müssen wir erst das Verhältniss der beiden beständigen Grössen a, b festsetzen.

*) Auf dieselbe Gleichung führt auch eine Aufgabe der Astronomie oder Physik, nämlich: welche Bahn muss ein von A erleuchteter Punct, M, durchlaufen, damit er dem Punct B immer mit demselben Glanze erscheint?

Wir wollen hier nur die drei Hauptfälle betrachten, wo $b > a$, $b = a$, $b < a$.*)

Erster Fall. Sei $b > a$, z. B. $b = 10$, $a = 6$.

Für $x = 0$ ist: $y = \pm\sqrt{b^2 - a^2}$



Messen wir

$CD = CE = \sqrt{b^2 - a^2}$

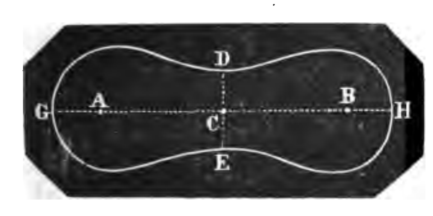
ab, so sind D und E die Puncte, in welchen die krumme Linie die Ordinaten-Achse schneidet.

Setzen wir $y = 0$, oder

$$\pm\sqrt{-(a^2 + x^2) + \sqrt{b^4 + 4a^2x^2}} = 0$$

so folgt hieraus: $x = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$. Die Abscissen der beiden reellen Durchschnittspuncte G und H sind also (weil $b > a$): $\pm\sqrt{a^2 + b^2} = CG = CH$.

Für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$ ist y reell, für grössere Werthe von x aber imaginär.



Unsere krumme Linie (die sogen. Cassinische) **) ist also eine geschlossene, ein Oval, wenn $b \overline{>} a\sqrt{2}$. Ist aber $b < a\sqrt{2}$, so erscheint die Linie bei D und E eingedrückt, und zwar um so mehr, je weniger b von a verschieden ist. Es sei nun

Zweiter Fall. $b = a$, alsdann verwandelt sich die Gleichung (2) in:

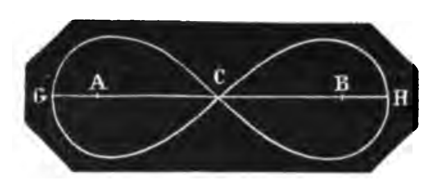
$$y = \pm\sqrt{-(a^2 + x^2) + \sqrt{a^4 + 4a^2x^2}} \;\ldots\ldots (3)$$

---

*) Enthält eine Gleichung veränderlicher Grössen nur eine beständige Grösse, wie die gewöhnlichen Gleichungen des Kreises und der Parabel, so kann die Aenderung dieser beständigen Grösse die Gestalt und Eigenschaften der krummen Linie nicht ändern, bedeutend aber, wenn die Gleichung mehre beständige Grössen enthält, wie vorliegendes Beispiel zeigt.

**) Montucla histoire des mathématiques Tom. II, pag. 563.

Für $x=0$ ist jetzt auch $y=0$. Die krumme Linie geht also durch den Anfangspunct C.



Für $y=0$ ist $x=0$ und $x=\pm a\sqrt{2}$=CG=CH. Für alle Werthe von $x=0$ bis $x=\pm a\sqrt{2}$ bleibt die Ordinate immer reell.

Die der Aufgabe Genüge leistende krumme Linie hat also für den Fall, wo $b=a$, die Gestalt einer Schleife.

Dritter Fall. Sei endlich $b<a$, z. B. $b=\frac{1}{2}a$, alsdann verwandelt sich die Gleichung (2) in:

$$y=\pm\sqrt{-(a^2+x^2)+\sqrt{\tfrac{1}{16}a^4+4a^2x^2}} \quad .....(4)$$

Für $x=0$ wird y imaginär, die Ordinaten-Achse folglich gar nicht geschnitten.

Für $y=0$ ist $x=\pm\frac{a}{2}\sqrt{(4\pm1)}$; die Abscissen-Achse hat also vier Puncte mit der krummen Linie gemein. Nimmt man nämlich CG=CH$=\pm\frac{1}{2}a\sqrt{5}$ und CF=CK$=\pm\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, so sind G, H, F, K diese vier Puncte. Und da nun für alle Werthe von $x=\pm\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ bis $x=\pm\frac{1}{2}a\sqrt{5}$ y reell ist, so folgt, dass für diesen Fall ($b<a$) der fragliche geometrische Ort eine discontinuirliche Linie ist, nämlich aus zwei Ovalen besteht.



Weil in der Gleichung (2) die Aenderung einer einzigen Constante (b) schon vier verschiedene Gestalten hervorruft, so kann man hiernach abnehmen, wie viele verschiedene Gestalten alle mögliche Aenderungen aller Constanten in den allgemeinen Gleichungen dritten, vierten ..... Grades erzeugen müssen.*)

*) Wer sich für solche Probleme über geometrische Oerter interessirt, findet eine grosse Sammlung derselben in Brandes höhere Geometrie (zwei Quartbände).

Fünftes Buch.

Coordinaten-Verwandlung.

67 a.

Wir haben schon in der Einleitung (VII, 13 und 15) darauf aufmerksam gemacht, dass die Entdeckung der Eigenschaften einer krummen Linie, so wie die Auflösung einer Aufgabe durch die richtige Wahl des Coordinaten-Systems und der Lage des Anfangspuncts sehr gefördert werden kann, und dass man deshalb oftmals den zuerst gewählten Anfangspunct verlegen, den Coordinaten-Achsen eine andere Richtung geben, statt eines rechten Coordinatenwinkels einen spitzen oder stumpfen nehmen, auch wohl von einem Parallel- zu einem Polar-Coordinaten-System, oder umgekehrt, übergehen müsse, welches Alles man unter dem Namen Coordinaten-Verwandlung begreift. Ein paar leichte Fälle solcher Verwandlungen sind bereits vorgekommen (Seite 89, 14 und §§ 19 und 57), und es ist hier nun der Ort, dieses umständlich zu erörtern, und alle einzelnen Fälle, welche vorkommen können, besonders zu betrachten. Die Coordinaten-Verwandlungen sind auch schon deshalb wichtig und wohl zu merken, weil man bei verschiedenen Untersuchungen, namentlich in der Mechanik, wo man krumme Linien von geforderten Eigenschaften sucht, oftmals auf eine bereits bekannte geführt wird, und die nur deshalb als neue aussieht, weil ihre Gleichung unter einer fremden, durch den gewählten Anfangspunct etc. bedingten Form erscheint, welche sich dann aber durch eine Coordinaten-Verwandlung auf eine bereits bekannte Form zurückführen lässt. So kann man z. B. schon aus § 57 schliessen, dass jede Gleichung von der Form: $yx = m$ nothwendig eine Hyperbel giebt.

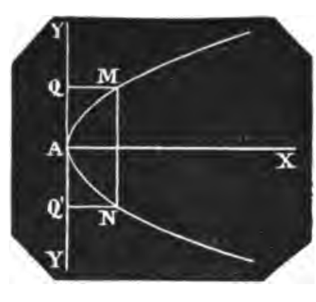
67 b.

Verwechselung der Coordinaten-Achsen.

Wenn y eine Function von x ist, so ist auch umgekehrt x eine Function von y. In Zeichen:

wenn: $y = \varphi(x)$ ....(1)
so ist auch: $x = \psi(y)$ ....(2)

Statt nämlich x als unabhängig veränderliche Grösse zu betrachten, und die für beliebige Annahmen derselben davon abhängenden Ordinaten y nach Gleichung (1) zu berechnen, kann man auch y als unabhängig betrachten, und zu beliebig angenommenen und auf der Ordinaten-Achse abgesteckten Werthen von y, die zugehörigen Abscissen x nach Gleichung (2) berechnen und antragen, wodurch die Construction der in (1) enthaltenen Linie oftmals leichter wird.



So ist z. B. die gewöhnliche Gleichung der Parabel in Bezug auf y irrational, nämlich:

$$y = \sqrt{px} \quad \ldots\ldots (1)$$

rational aber, wenn man sie auf x reducirt, nämlich:

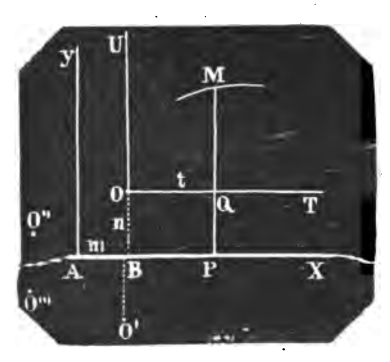
$$x = \frac{y^2}{p} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

welche Gleichung ebenfalls alle Puncte der Parabel giebt, indem man zu je zwei beliebig genommenen gleichen und entgegengesetzten Ordinaten $\pm y = \mathrm{AQ} = \mathrm{AQ'}$, die dadurch bestimmten Abscissen $x = \mathrm{QM} = \mathrm{Q'N}$ berechnet.

Man könnte in (2) auch die Zeichen x, y, und zugleich die Achsen mit einander verwechseln, dann wäre $y = \frac{x^2}{p}$ die Gleichung derselben Parabel.

68.

Verlegung des Anfangspuncts oder parallele Verschiebung der Coordinaten-Achsen.



Sei $y = \varphi(x)$ die Gleichung irgend einer krummen Linie für den Anfangspunct A, so dass für einen Punct, M (x, y):

$$\mathrm{AP} = x, \ \mathrm{MP} = y$$

Verlegt man den Anfangspunct A nach O (m, n), so dass

$$\mathrm{AB} = m, \ \mathrm{OB} = n$$

zieht die neuen Coordinaten-

Achsen OT, OU mit den alten parallel, und bezeichnet der Unterscheidung wegen, nach **Euler's** Vorgange, die neue Abscisse und Ordinate desselben Puncts M mit t und u, so dass

$$OQ = t, \; MQ = u$$

so ist für dieselbe krumme Linie die neue Ordinate u eine bestimmte Function von der neuen Abscisse t und den bekannten Coordinaten m, n des neuen Anfangspuncts O, und man kann diese neue Gleichung zwischen t, u leicht aus der ursprünglichen ableiten, indem man nur die alten Coordinaten x, y durch die neuen t, u und m, n auszudrücken, und die dafür erhaltenen Ausdrücke statt x, y in die Gleichung zwischen diesen alten Coordinaten zu substituiren braucht. Es ist nämlich:

$$x = t + m = AP \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$y = u + n = MP \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Setzt man nun in die ursprüngliche Gleichung:

$$y = \varphi(x) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$t + m$ statt x und $u + n$ statt y, so ist offenbar auch:

$$u + n = \varphi(t + m) \;\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$
$$u = \varphi(t + m) - n \;\ldots\ldots\ldots (5)$$

in Worten: Giebt die Gleichung (3) für eine Abscisse, $x = AP$, die Ordinate $y = MP$, so giebt die Gleichung (4) (indem man zu der von O aus gemessenen Abscisse t die Grösse $m = AB$ addirt) noch dieselbe Ordinate $y = u + n = MP$, und man muss also, weil die Ordinaten jetzt von der Linie OT aus aufgetragen werden, von $y = \varphi(t + m)$ das Stück $QP = OB = n$ subtrahiren, um die neue Ordinate $u = MQ$ zu erhalten, welche denselben Punct M bestimmt.

Anmerkung 1. Läge der neue Anfangspunct in O', so wäre n, läge er in O'', so wäre m, und läge er in O''', so wären beide, m und n, negativ.

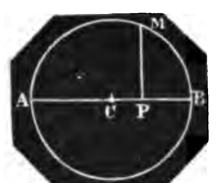
Anmerkung 2. Man sieht leicht ein, dass durch eine solche Coordinaten-Verwandlung wohl die Form, nicht aber der **Grad** der Gleichung für die krumme Linie geändert wird. Dies gilt auch von allen folgenden Umformungen.

69.

Aufgabe. Aus der Mittelpunctsgleichung des Kreises:

$$y^2 = r^2 - x^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

die Gleichung für denselben abzuleiten, wenn der Anfangspunct, statt in C, im Scheitel A angenommen wird.



Auflösung. Da hier der Anfangspunct in der Abscissenlinie um die Länge des Radius zurückgeschoben wird, so ist hier

$$m = -r,\ n = 0$$

also $x = t - r = \mathrm{AP} - \mathrm{AC}$, $y = u$, und man hat aus der Gleichung (1), indem man $t - r$ statt x setzt, oder auch unmittelbar aus der Figur

$$u^2 = r^2 - (t - r)^2$$
$$u^2 = 2rt - t^2$$

oder wenn man, der Gewohnheit wegen, die jetzt von A aus gerechneten Abscissen wieder mit x, und die Ordinaten mit y bezeichnet

$$y^2 = 2rx - x^2 \dots\dots\dots\dots (2)$$

Soll B der Anfangspunct sein, so ist die Gleichung desselben Kreises:

$$y^2 = -2rx - x^2 \dots\dots\dots\dots (3)$$

welche nur für negative Abscissen von $x = 0$ bis $x = -2r$ reelle Ordinaten giebt.

Beispiel. Man leite aus der Gleichung (2) und (3) wieder die Mittelpuncts-Gleichung ab.

70.

Aufgabe. Man bestimme aus den Mittelpuncts-Gleichungen der Ellipse und Hyperbel ihre Scheitel-Gleichungen.

Auflösung. Auf dieselbe Weise, wie im § 69, findet man die Scheitel-Gleichungen der Ellipse:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(-2ax - x^2) \dots\dots\dots\dots (2)$$

und die der Hyperbel:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(-2ax + x^2) \dots\dots\dots\dots (3)$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2) \dots\dots\dots\dots (4)$$

Setzt man $\frac{2b^2}{a}=f$, $\frac{b^2}{a^2}=g$, so sieht man, dass jede Gleichung von der Form:

$$y^2=\pm fx-gx^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

eine Ellipse, und jede Gleichung von der Form:

$$y^2=\pm fx+gx^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

eine Hyperbel giebt. Für letztere vergl. § 35, Anmerkung 2, $Ay^2-Bx^2=-C$.

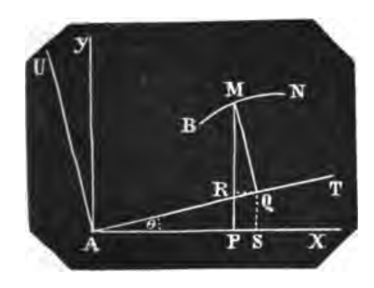
71.

Umformung der Coordinaten durch Drehung der Achsen.

Aufgabe. Es sei die Gleichung einer auf die rechtwinkligen Achsen AX, AY bezogenen Linie, BN, gegeben, nämlich:

$$\varphi(x, y)=0$$

Wie findet man hieraus die Gleichung für dieselbe Linie, wenn sie auf die neuen, ebenfalls rechtwinkligen Achsen AT, AU bezogen wird, welche gegen die alten Achsen unter einem gegebenen Winkel, TAX $=\theta$, geneigt sind?



Auflösung. Es kommt offenbar wieder nur darauf an, die alten Coordinaten (x, y) durch die neuen (t, u) und den gegebenen Winkel θ auszudrücken, um dann nur die für x und y erhaltenen Ausdrücke in die gegebene Gleichung (1) statt x und y setzen zu brauchen.

Seien nun für einen beliebigen Punct, M:

$$AP=x, \quad AQ=t$$
$$MP=y, \quad MQ=u$$

so hat man unmittelbar aus der Figur:

$$QMR=TAX=\theta$$
$$AP=AS-QR=AQ\cos\theta-MQ\cdot\sin\theta$$
$$MP=QS+MR=AQ\sin\theta+MQ\cdot\cos\theta$$

daher:

$$x = t\cos\theta - u\sin\theta \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$y = t\sin\theta + u\cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Werden diese Werthe von x und y in $\varphi(x, y) = 0$ substituirt, so erhält man die verlangte neue Gleichung zwischen t und u, an deren Stelle man dann wieder die üblichen Zeichen x, y setzen kann.

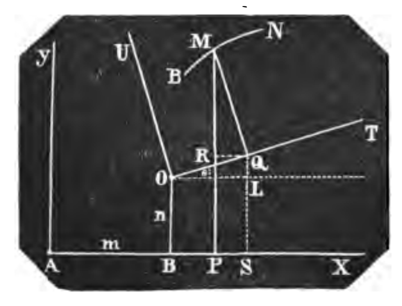
1) Wäre der Winkel θ stumpf, jedoch < 180, so ist in obigen Formeln (von denen wir bald Gebrauch machen werden) $\cos\theta$ und auch u negativ. In diesem Fall ist es aber einfacher, die Achsen rechts herum zu drehen.

2) Werden die Achsen, statt links, wie hier angenommen, rechts (um einen Winkel, $\theta < 90^\circ$), herumgedreht, so braucht man in obigen Formeln θ nur negativ zu setzen.

3) Sind in einer algebraischen Gleichung $F(x, y) = 0$ die beiden veränderlichen Grössen in gleich hoher, $n$ter Potenz ohne Nenner und Coefficient, enthalten (x^n, y^n), und ist der Grad der übrigen Glieder kleiner als n, so kann man in den beiden Fällen, wo n grade, und die Vorzeichen von x^n, y^n ungleich, oder wenn n ungrade, und die Vorzeichen gleich sind, durch Drehung der Achsen um $\theta = 45^\circ$, aus der Gleichung $F(x, y) = 0$, immer eine neue $\varphi(t, u) = 0$ ableiten, welche in Bezug auf u, um einen Grad niedriger ist. (Siehe § 79, 5.)

72.

Umformung der Coordinaten durch Drehung der Achsen und gleichzeitige Verlegung des Anfangspuncts.

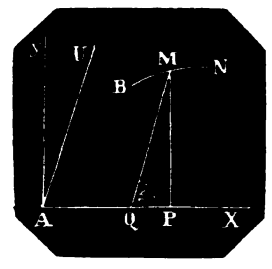


Sind $AB = m$, $OB = n$ die Coordinaten des neuen Anfangspuncts O, und alles Uebrige wie in vorhergehender Aufgabe, so hat man unmittelbar:

$$x = m + t\cos\theta - u\sin\theta \ldots (1)$$
$$y = n + t\sin\theta + u\cos\theta \ldots (2)$$

73.

Verwandlung der Coordinaten, indem man von rechtwinkligen auf schiefwinklige übergeht, und umgekehrt.



Sei die rechtwinklige Coordinaten-Gleichung der Linie BN:

$$y = \varphi(x) \ldots\ldots (1)$$

und für einen beliebigen Punct, M, die alten Coordinaten:

$$AP = x,\ MP = y$$

Die neuen unter dem Winkel UAX $= \mathfrak{b}$ mit einander verbundenen Coordinaten:

$$AQ = t,\ MQ = u$$

so hat man unmittelbar:

$$x = t + u \cos \mathfrak{b} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$y = u \cdot \sin \mathfrak{b} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Werden diese Ausdrücke für x, y in (1) substituirt, so hat man die Gleichung zwischen t und u. Ist $\mathfrak{b}$ stumpf, so ist natürlich $\cos \mathfrak{b}$ negativ.

Will man umgekehrt von schiefwinkligen Coordinaten, t, u, auf rechtwinklige übergehen, so ist:

$$t = x - y \cot \mathfrak{b} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$u = \frac{y}{\sin \mathfrak{b}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

74.

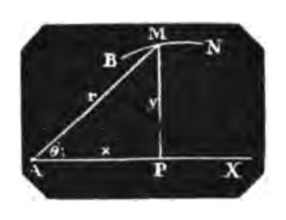
Verwandlung rechtwinkliger Coordinaten in Polar-Coordinaten, und umgekehrt.

Aufgabe. Es sei die rechtwinklige Coordinaten-Gleichung einer krummen Linie, BN:

$$\varphi(x, y) = 0$$

gegeben. Wie findet man hieraus die Polar-Gleichung für dieselbe Linie, wenn der Anfangspunct zum Pol und die positive

Seite der Abscissenlinie als ursprüngliche Richtung angenommen wird?



Auflösung. Ist für einen Punct, M

$$AP = x,\ MAX = \theta$$
$$MP = y,\quad AM = r$$

so hat man unmittelbar:

$$x = r \cos\theta$$
$$y = r \sin\theta$$

diese Ausdrücke für x und y in $\varphi(x, y) = 0$ substituirt, kommt die verlangte Polar-Gleichung zwischen r und θ.

Wird aber der Pol ausserhalb des Anfangspuncts A in einem andern Punct, O (m, n), angenommen, so muss man den vorhergehenden Ausdrücken für x und y noch die Coordinaten des Pols O hinzufügen, dann ist:

$$x = m + r\cos\theta$$
$$y = n + r\sin\theta$$

Will man umgekehrt Polar-Coordinaten, θ, r, in rechtwinklige übersetzen, so folgt unmittelbar aus der Figur, wenn der Pol zum Anfangspunct genommen wird:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\theta = \operatorname{Arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{y}{x}\right)$$

75.

Aufgabe. Aus der rechtwinkligen Coordinaten-Gleichung der Parabel $y^2 = px$ die Polar-Gleichung abzuleiten, wenn der Pol im Brennpunct angenommen wird.

Auflösung. Hier ist $m = \frac{1}{4}p$, $n = 0$, daher:

$$x = \frac{1}{2}p + r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$r^2\sin^2\theta = \frac{1}{4}p^2 + pr\cos\theta$$

$$r^2 - \frac{p\cos\theta}{\sin^2\theta}\cdot r = \frac{\frac{1}{4}p^2}{\sin^2\theta}$$

$$r = \frac{\frac{1}{2}p\cos\theta \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2\cos^2\theta + \frac{1}{4}p^2\sin^2\theta}}{\sin^2\theta}$$

$$r = \frac{\frac{1}{2}p\,(\cos\theta \pm 1)}{(1+\cos\theta)\;(1-\cos\theta)}$$

Soll die Drehung des Radius vector vom Scheitel anheben, so muss man $-\cos\theta$ statt $+\cos\theta$ setzen, und dann ist:

$$r = \frac{\frac{1}{2}p}{\pm 1 + \cos\theta}$$

Für jeden Werth von θ erhält man zwei entgegengesetzte r.

76.

Wenn eine Gleichung zweier veränderlichen Grössen in Bezug auf jede derselben den zweiten Grad übersteigt, und zugleich eine verwickelte ist, sich aber nicht, wie die in E, Seite 24, auf eine quadratische zurückführen lässt, so ist es im Allgemeinen auch nicht thunlich, die Gleichung auf eine der veränderlichen Grössen zu reduciren, und man muss in solchem Falle, um den Lauf der krummen Linie wenigstens durch einige Puncte zu verfolgen, sich nach andern analytischen Kunstgriffen umsehen. Zuweilen erreicht man seinen Zweck durch Einführung einer dritten veränderlichen Grösse, zuweilen auch durch den Uebergang von gradlinigten — zu Polar-Coordinaten, und umgekehrt, oder auch durch Verlegung des Anfangspuncts und Drehung der Achsen etc.

77.

Cramer führt in seiner Introduction à l'analyse des lignes courbes aus Guido Grandi: Flores geometrici (Florenz, 1728) folgende Gleichung vom 6ten Grade an:

$$y^6 + 3x^2y^4 + 3x^4y^2 + x^6 = 4a^2x^2y^2 \;\ldots\ldots (1)$$

Die hierin liegende Gestalt kann man sich aber leichter vorstellen und auch sehr leicht construiren, wenn man diese in

Bezug auf x, y symmetrische Gleichung, welche sich auch so schreiben lässt:

$$(y^2 + x^2)^3 = 4\,a^2\,x^2\,y^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

in eine Polargleichung übersetzt.*) Setzt man nämlich:

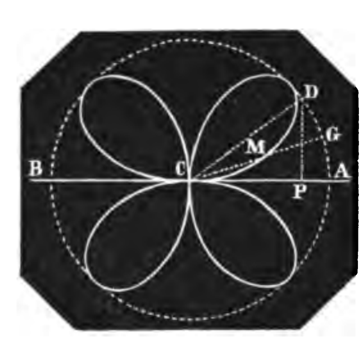
$$x = \varrho \cos \varphi, \qquad y = \varrho \sin \varphi$$

und folglich $x^2 + y^2 = \varrho^2$, so erhält man aus (2):

$$\varrho^6 = 4\,a^2\,\varrho^4 \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi,$$

mithin: $\varrho = 2\,a \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$,

oder kürzer: $\varrho = a \sin 2\,\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$



Beschreibt man nun mit einem Radius, $CA = a$, einen Kreis, und steckt darauf $\widehat{AD} = 2\widehat{AG}$ ab, so ist offenbar der zu dem Winkel $ACG = \varphi$ gehörende Radius vector gleich dem von D auf AB gefällten Perpendikel DP $(= a \sin 2\,\varphi)$. Nimmt man also $CM = DP$, so ist M ein Punct der krummen Linie, deren man auf diese Weise leicht noch mehre bestimmen kann.

Aus der Natur der trigonometrischen Function $\sin 2\,\varphi$ folgt, dass die krumme Linie viermal durch den Pol C geht, und aus vier vollkommen gleichen, symmetrisch liegenden Blättern besteht, deren Spitzen die Peripherie in vier gleiche Bögen theilen.

78.

Aufgabe. Die in folgender Polargleichung enthaltene Linie darzustellen:

$$r = \frac{b}{\sin \theta - a \cos \theta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Auflösung. Man versuche zuvor, ob die Darstellung leichter ist, wenn man die Polar-Coordinaten in rechtwinklige verwandelt. Setzt man deshalb (nach § 74) $\sin \theta = \frac{y}{r}$, $\cos \theta = \frac{x}{r}$, so

*) Man hätte hier auch, wie in § 79, $y = tx$ setzen können.

verwandelt sich die Gleichung (1) in: $r = \frac{b}{\frac{y}{r} - \frac{ax}{r}} = \frac{rb}{y - ax}$ und hieraus folgt:

$$y = ax + b \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

Mithin ist die in (1) enthaltene Linie die durch (2) deutlicher ausgedrückte einfache grade Linie.

79.

* **Aufgabe.** Einige Puncte der krummen Linie zu bestimmen, welche in folgender Gleichung enthalten ist:

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

Auflösung. Man setze: $y = tx$, so verwandelt sich obige Gleichung in: $t^3x^3 - 3atx^2 + x^3 = 0$, oder, indem man durch x^2 dividirt, in $t^3x - 3at + x = 0$. Hieraus folgt:

$$x = \frac{3at}{1 + t^3} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$\text{mithin: } y = \frac{3at}{1 + t^3} \cdot t \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Hierdurch sind also beide Coordinaten durch eine und dieselbe dritte veränderliche Grösse, t, ausgedrückt, und für jeden beliebig gesetzten Werth von t erhält man aus (2) und (3) ein paar zusammengehörige Coordinaten, x, y. Man hat z. B. für:

$$t = 0,\ \tfrac{1}{2}, \dots 1, \dots 2, \dots -1, \dots -2 \dots$$
$$x = 0,\ \tfrac{4}{3}a, \dots \tfrac{3}{2}a, \dots \tfrac{2}{3}a, \dots -\infty, \dots +\tfrac{6}{7}a \dots$$
$$y = 0,\ \tfrac{2}{3}a, \dots \tfrac{3}{2}a, \dots \tfrac{4}{3}a, \dots +\infty, \dots -\tfrac{12}{7}a \dots$$

Trägt man nun die vermittelst der veränderlichen Grösse t bestimmten Coordinaten x, y auf, indem man für die beständige Grösse a eine beliebige Zahl, oder auch eine beliebige Linie, die hier (wie der Radius beim Kreise, oder wie der Parameter bei der Parabel) als das Maass der krummen Linie betrachtet werden kann, annimmt, so erhält man eben so viele Puncte derselben, deren man leicht noch mehre bestimmen kann.

Eine deutliche Vorstellung von der Gestalt unsrer krummen Linie (welche das Cartesische Blatt genannt wird) erhält man

aber auf diese Weise nicht. Dazu ist durchaus erforderlich, dass man aus ihrer Gleichung $y^3 - 3axy + x^3 = 0$, für bestimmte Annahmen der einen veränderlichen Grösse, z. B. $x = 1, 2, 3, \ldots$ die zugehörigen Werthe der andern berechnet, was zwar mühsam, aber immer möglich ist, jedoch die Kenntniss der höhern Gleichungen und der Infinitesimalrechnung voraussetzt. (Darnach würde man z. B. finden, dass von $x = 0$ bis $x = a\sqrt[3]{4}$, y immer drei reelle Werthe, von $x = a\sqrt[3]{4}$ bis $x = \infty$ aber immer nur einen reellen Werth erhält.)

Auch ist leicht einzusehen, dass für jeden positiven und negativen Werth von x, y wenigstens einen reellen negativen und positiven Werth erhalten muss, und die krumme Linie mithin zwei unendliche Schenkel hat.

Versuchen wir einmal, ob wir die krumme Linie noch etwas näher kennen lernen können, indem wir sie auf Polar-Coordinaten beziehen. Aus der Gleichung:

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0$$

folgt, wenn wir $r \cos \varphi = x$ und $r \sin \varphi = y$ substituiren:

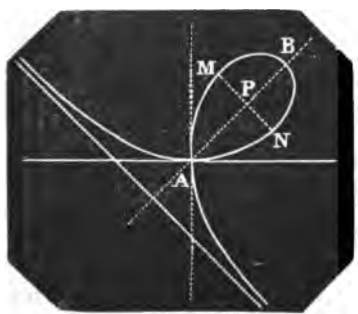
$$r = \frac{3a \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$r = \frac{\frac{3}{2}a \cdot \sin 2\varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Diese Gleichung lehrt nun:

1) Dass für jeden Werth von φ, r reell, mithin die krumme Linie eine continuirliche ist.

2) Dass für $\varphi = 135^0$ und $\varphi = 315^0$ oder $= -45^0$, der Nenner $= 0$ und mithin $r = \pm \infty$ wird.



3) Für $\varphi = 0$ und $\varphi = 90^0$ wird $r = 0$. Die Linie geht also zweimal durch den Pol A.

4) Weil nach bekannten goniometrischen Formeln $\cos(45 + m) = \sin(45 - m)$, mithin auch $\cos^3(45 + m) = \sin^3(45 - m)$, so wird, φ wenn man $= 45 + m$ setzt, und noch bemerkt, dass

$$\sin(90+2m)=\sin(90-2m)=\cos 2m=\cos(-2m):$$

$$r=\frac{\frac{3}{2}a\sin(90+2m)}{\sin^3(45+m)+\sin^3(45-m)}\ldots\ldots.(3)$$

$$r=\frac{\frac{3}{2}a\cos 2m}{\sin^3(45+m)+\sin^3(45-m)}\ldots\ldots.(4)$$

Aus dieser Gleichung ersieht man, dass, von $\varphi=0$ an, r immer wächst bis $\varphi=45^0$ $(m=0)$, wo $r=\frac{3a}{\sqrt{2}}=AB$ wird, und seinen grössten Werth erreicht; von $\varphi=45$ bis $\varphi=90$ nimmt r wieder ab, und da nach (4) für Winkel gleichviel über und unter 45^0, r einerlei Werth erhält, so sieht man, dass das entstehende Blatt durch die Linie AB in zwei sich deckende Hälften getheilt wird.

5) Zufolge § 71, 3 kann man aus der cubischen Gleichung:

$$y^3-3axy+x^3=0$$

durch eine einfache Coordinatenverwandlung eine neue Gleichung zwischen t, u ableiten, welche in Bezug auf eine dieser veränderlichen Grössen nur vom zweiten Grade ist; dreht man nämlich die Achsen um $\theta=45^0$, setzt $AP=t$, $MP=u$, so folgt aus den allgemeinen Umwandlungsformeln:

$$x=t\cos\theta-u\sin\theta \quad \Bigg\| \quad x=\frac{t-u}{\sqrt{2}}$$

$$y=t\sin\theta+u\cos\theta \quad \Bigg\| \quad y=\frac{t+u}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{t+u}{\sqrt{2}}\right)^3-3a\frac{t-u}{\sqrt{2}}\cdot\frac{t+u}{\sqrt{2}}+\left(\frac{t-u}{\sqrt{2}}\right)^3=0$$

$$u=\pm t\sqrt{\frac{3a-t\sqrt{2}}{3a+3t\sqrt{2}}}$$

Zu jedem Werth von t gehören zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von u.

Für $t=0$ und $t=\frac{3a}{\sqrt{2}}$ wird $u=0$, für $t>+\frac{3a}{\sqrt{2}}$ wird u imaginär. Für $t=-\frac{a}{\sqrt{2}}$ wird $u=\pm\infty$.

Sechstes Buch.

Durchmesser der Kegelschnitte.

80.

Erklärung. Unter Durchmesser einer krummen Linie versteht man jede Grade, welche parallele Sehnen halbirt.

Ausserdem, dass die Kenntniss der Durchmesser einer krummen Linie manchmal zur Entdeckung merkwürdiger Eigenschaften derselben verhilft, findet namentlich die der Kegelschnitte auch in der Theorie der Chartenprojectionen eine Anwendung, und wir wollen deshalb das Wichtigste darüber mittheilen.

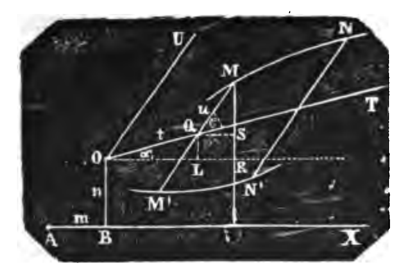
81.

Auf eine allgemeine Methode, nach welcher man entdecken kann, ob eine krumme Linie einen oder mehrere Durchmesser habe, und wie sie liegen, kommt man durch folgende Betrachtungen.

Seien, um ein Bild vor Augen zu haben, MN, M'N' Theile irgend einer bekannten krummen Linie, deren rechtwinklige Coordinaten-Gleichung:

$$y = \psi(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Ist nun OT ein von O ausgehender Durchmesser, welcher die parallelen Sehnen MM', NN'.... halbirt, α der Winkel, den er mit der Abscissenrichtung AX, und β der Winkel, den er mit den parallelen Sehnen macht, m und n die rechtwinkligen Coordinaten des Punctes O; x, y die eines Punctes, M, so könnte



man OT als neue Abcissen-Achse, O als neuen Anfangspunct, und die parallelen Sehnen als Ordinaten betrachten, und wenn die Grössen $m, n, \alpha, \mathfrak{B}$ bekannt wären, die Beziehung zwischen den neuen Coordinaten, OQ$=t$, MQ$=u$, leicht aus $y=\psi\;(x)$ finden, indem man nur nach § 72 die durch $m, n, \alpha, \mathfrak{B}, t, u$ ausgedrückten und unmittelbar aus der Figur folgenden Werthe der alten Coordinaten x, y, nämlich:

$$x=m+t\cos\alpha+u.\cos(\alpha+\mathfrak{B})\ldots\ldots(1)$$
$$y=n+t\sin\alpha+u.\sin(\alpha+\mathfrak{B})\ldots\ldots(2)$$

in die Gleichung $y=\psi x$ zu substituiren brauchte. Die neue Gleichung zwischen u und t würde dann, wenn OT wirklich ein Durchmesser wäre, nothwendig so beschaffen sein, dass sie für jeden Werth von $t=$OQ paarweise gleiche und entgegengesetzte Werthe, MQ, M'Q für u gäbe; sie würde also, wenn $y=\psi x$ nur vom zweiten Grade wäre, in Bezug auf u eine reine quadratische sein, folglich die Form:

$$Au^2+Bt^2+Ct+D=0\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$u=\pm\sqrt{\left(\frac{-(Bt^2+Ct+D)}{A}\right)}\ldots\ldots\ldots(4)$$

haben, wo jedoch eine der Grössen B, C, D, oder auch B und D oder C und D zugleich, 0 sein können.

82.

Um also zu entdecken, ob eine krumme Linie zweiten Grades einen Durchmesser habe, und zugleich dessen Lage gegen die alte Abcissen-Achse und neue Ordinaten-Achse, nämlich die Winkel α, $\mathfrak{B}$, so wie auch die darauf bezogene neue Gleichung derselben krummen Linie zu finden, substituire man in die gegebene rechtwinklige Coordinaten-Gleichung $\psi\,(x,y)=0$, statt x, y, die vorhergehenden Werthe aus (1) und (2), und untersuche dann, ob sich die Grössen, m, n, α, $\mathfrak{B}$ so annehmen lassen, dass die neue Gleichung die in (3) angegebene Form erhält. Ist dies nicht möglich, so kann auch die Linie $\psi\,(x,y=0$ keinen Durchmesser haben. Bleiben dagegen unter den vier

zu bestimmenden Grössen m, n, α, β eine oder mehrere unbestimmt und ganz beliebig, so hat die krumme Linie mehrere Durchmesser.

82.

Aufgabe. Zu untersuchen, ob die Parabel Durchmesser habe.

Auflösung. Die bekannte Scheitelgleichung der Parabel ist:

$$y^2 - px = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Setzen wir hierin statt x, y die Ausdrücke aus (1) und (2) § 81, so erhält man:

$$[n + t\sin\alpha + u\cdot\sin(\alpha+\beta)]^2 - p[m + t\cos\alpha + u\cos(\alpha+\beta)] = 0$$

oder entwickelt und geordnet:

$$\left.\begin{array}{l}\sin^2(\alpha+\beta)\cdot u^2 + (2n\sin\alpha - p\cos\alpha)\cdot t + n^2 - pm \\ \sin^2\alpha\cdot t^2 + 2\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot tu + [2n\sin(\alpha+\beta) - p\cos(\alpha+\beta)]\cdot u\end{array}\right\} = 0 \ldots (2)$$

Damit nun diese Gleichung zwischen u, t die im § 81 angegebene Form (3) erhalte, müssen die Glieder in ut und u herausfallen, folglich die Coefficienten dieser Grössen $= 0$ sein. Dies giebt uns zur Bestimmung der noch unbekannten vier Grössen α, β, m, n nur die beiden Bedingungsgleichungen:

$$2\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$2n\sin(\alpha+\beta) - p\cdot\cos(\alpha+\beta) = 0 \ldots\ldots\ldots (4)$$

und es werden deshalb jedenfalls zwei dieser vier Grössen unbestimmt und willkürlich bleiben.

Aus der Gleichung (4) folgt:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{p}{2n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Weil nun p (der Parameter) eine wirkliche Grösse ist, und n nicht unendlich sein kann, so kann auch $\frac{p}{2n}$ oder $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ nicht Null sein, und also auch $\sin(\alpha+\beta)$ nicht $= 0$, und deshalb kann der Gleichung (3) nur dadurch Genüge geleistet werden, indem man $\sin\alpha$, also α selbst $= 0$ setzt. Es wird also, wenn die Parabel überhaupt einen Durchmesser, OT, hat, derselbe jedenfalls mit der Achse AX parallel laufen müssen.

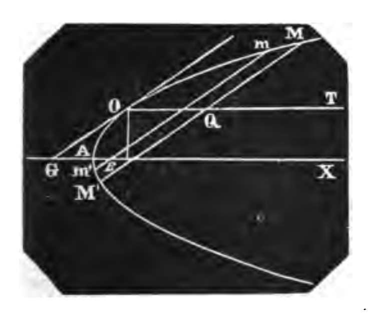
Indem nun $\alpha = 0$ sein muss, fällt aus der Gleichung (2) auch noch das Glied $\sin^2\alpha\cdot t^2$ heraus, und wir behalten demnach (weil das Glied in u wegen der Gleichung (4) herausfällt):

$$\sin^2 \mathfrak{C} \cdot u^2 - pt + n^2 - pm = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

In dieser Gleichung bleiben von den drei Grössen $\mathfrak{C}$, m, n zwei ganz willkürlich, weil $\mathfrak{C}$ und n sich gegenseitig bestimmen; denn vermöge der Gleichung (5) hat man noch (weil $\alpha = 0$) die Bedingung:

$$\operatorname{tg} \mathfrak{C} = \frac{p}{2n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Betrachten wir also in (6) $\mathfrak{C}$ als durch n gegeben, und daher m und n als die ganz willkürlich bleibenden Grössen, und nehmen diese der Einfachheit wegen so, dass der neue Anfangspunct O (m, n) in einen Parabel-Ast fällt, mithin zu einer beliebigen Abscisse, $m = AB$, die Ordinate $n = OB$ ist, so ist nach Gleichung (1) $n^2 - pm = 0$ und die Gleichung (6) der auf den Durchmesser OT bezogenen Parabel reducirt sich für diese Annahme von m und n auf die höchst einfache:



$$\sin^2 \mathfrak{C} \cdot u^2 = pt \, .. (8)$$

Zur Bestimmung des Winkels $\mathfrak{C}$ giebt uns die Gleichung (7):

$$\operatorname{tg} \mathfrak{C} = \frac{p}{2n}$$

folglich ist auch: $\operatorname{tg} \mathfrak{C} = \frac{pm}{2nm} = \frac{n^2}{2nm}$

oder: $\operatorname{tg} \mathfrak{C} = \frac{n}{2m}$



Machen wir daher $AG = AB = m$, so ist: $\frac{OB}{BG} = \frac{n}{2m} = \operatorname{tg} \mathfrak{C}$.

Es ist folglich $OGB = \mathfrak{C}$. Die Linie GO giebt die Richtung der durch OT halbirten Sehnen an. Diese Linie OG ist nun aber, wegen $GB = 2AB$, eine Tangente am Puncte O. Daher der Satz: Jede durch einen beliebigen Punct, O, einer Parabel mit der Achse parallel laufende Linie, OT, ist ein Durchmesser der Parabel, und die halbirten Sehnen laufen mit der durch denselben Punct O gehenden Tangente parallel.

84.

Aufgabe. Zu untersuchen, ob die Ellipse, ausser der grossen und kleinen Achse, noch andere Durchmesser habe.

Auflösung. Wenden wir die § 82 gezeigte Entdeckungsmethode auch hier an, und substituiren in die Mittelpuncts-Gleichung der Ellipse:

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

die Werthe von x, y aus (1), (2) § 81, so erhält man die Gleichung zwischen den neuen Coordinaten u, t:

$$a^2[n+t\sin\alpha+u\sin(\alpha+\beta)]^2+b^2[m+t\cos\alpha+u\cos(\alpha+\beta)]^2-a^2b^2=0$$

oder entwickelt und geordnet:

$$\left.\begin{matrix}a^2\sin^2(\alpha+\beta)\\ b^2\cos^2(\alpha+\beta)\end{matrix}\right\}\cdot u^2+\left.\begin{matrix}a^2\sin^2\alpha\\ b^2\cos^2\alpha\end{matrix}\right\}\cdot t^2+\left.\begin{matrix}2a^2n\cdot\sin\alpha\\ 2b^2m\cdot\cos\alpha\end{matrix}\right\}\cdot t+\left.\begin{matrix}a^2n^2\\ b^2m^2\\ -a^2b^2\end{matrix}\right\}$$
$$+\left.\begin{matrix}2a^2\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)\\ 2b^2\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)\end{matrix}\right\}\cdot ut+\left.\begin{matrix}2a^2n\sin(\alpha+\beta)\\ 2b^2m\cos(\alpha+\beta)\end{matrix}\right\}\cdot u \;=0 \ldots (2)$$

Damit diese Gleichung die in (3) § 81 angegebene, für einen Durchmesser nothwendige Form erhalte, und die Glieder in ut und u auswerfe, haben wir zur Bestimmung von m, n, α, β die beiden Bedingungsgleichungen:

$$2a^2\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)+2b^2\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)=0 \ldots (3)$$
$$2a^2n\sin(\alpha+\beta)+2b^2m\cos(\alpha+\beta)=0 \ldots\ldots (4)$$

$$\text{Aus (3) folgt: } \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\cot\alpha$$

$$\text{Aus (4) folgt: } \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{m}{n}$$

$$\text{Daher: } \cot\alpha=\frac{m}{n}$$

Statt der beiden Bedingungsgleichungen (3) und (4) können wir also die beiden einfachern (5) und (6) nehmen:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\cot\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\cot\alpha=\frac{m}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Zwei von den Grössen m, n, α, β bleiben hiernach willkür-

lich, zum Beweise, dass die Ellipse unzählig viele Durchmesser haben muss.

Mögen m und n diese willkürlichen Grössen sein, und nehmen wir, der Einfachheit wegen, $m=0$, und $n=0$, so dass also der Anfangspunct im Mittelpunct bleibt, so ist:

$$\cot \alpha = \frac{0}{0} \quad \text{(s. Algebra § 328)}$$

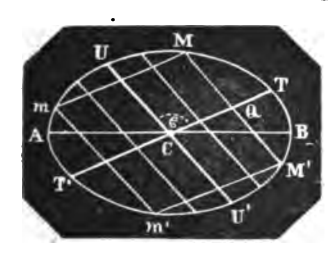
und wegen dieses unbestimmten Ausdrucks $\frac{0}{0}$ auch der Winkel α noch ganz beliebig, aber für jede dafür gemachte Annahme (z. B. $\alpha = TCB$) der Winkel β sofort bestimmt. Es folgt nämlich aus (5):

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \cot \alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \cot \alpha + \frac{b^2}{a^2} \cdot \operatorname{tg}\beta$$

$$\text{daher:} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{a^2 \operatorname{tg}\alpha + b^2 \cot \alpha}{b^2 - a^2} \ldots\ldots\ldots (7)$$

In diesem Ausdrucke für $\operatorname{tg}\beta$ ist der Nenner negativ (weil $a > b$), und daher, wenn α spitz genommen wird, der neue Coordinatenwinkel β stumpf, und umgekehrt.



Sei nun TCB der beliebig angenommene Winkel α, und UCT der dann nach (7) bestimmte Winkel β, unter welchem der Durchmesser TT' die mit UU' parallelen Sehnen MM'.. schneidet, so ist die aus (2) folgende Gleichung der auf diese neuen Coordinatenachsen TT', UU' bezogenen Ellipse (indem wegen $m=0$, $n=0$ aus (2) auch noch das Glied in t, so wie $a^2 n^2$, $b^2 m^2$ herausfallen)·

$$[a^2 \sin^2(\alpha+\beta) + b^2 \cos^2(\alpha+\beta)] \cdot u^2 + [a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha] \cdot t^2 = a^2 b^2 \ldots (8)$$

Nach dieser Gleichung erhält man nicht allein für jeden Werth von $t = CQ$ gleiche und entgegengesetzte u (MQ, M'Q), sondern auch für gleiche entgegengesetzte t (CQ, CQ') gleiche u; es ist also nicht blos TT', sondern zugleich auch UU' ein wirklicher Durchmesser.

Zwei solche sich kreuzende Durchmesser, deren jeder die mit dem andern parallelen Sehnen halbirt, heissen **verbundene Durchmesser**, und der Winkel β, den sie mit einander machen, der **Verbindungswinkel**.

Weil dieser Winkel $\mathfrak{E}$, vermöge Gleichung (7), eine Function von α ist, so lässt sich vorstehende Gleichung noch auf eine andere von $\mathfrak{E}$ befreite Form bringen. Da nämlich nach Gleichung (5):

$$\operatorname{tg}(\alpha+\mathfrak{E}) = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\cot\alpha$$

so ist: $$\sin^2(\alpha+\mathfrak{E}) = \frac{b^4\cos^2 a}{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha}\ ^{*)}$$

$$\cos^2(\alpha+\mathfrak{E}) = \frac{a^4\sin^2\alpha}{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha}$$

Dieses in (8) substituirt, ist auch:

$$\frac{a^2b^4\cos^2\alpha+a^4b^2\sin^2\alpha}{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha}\cdot u^2+(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)\cdot t^2 = a^2b^2\ldots(9)$$

85.

Aufgabe. Durch die gegebene halbe grosse und kleine Achse a, b der Ellipse und den beliebig genommenen Winkel α sind die Grössen der beiden halben verbundenen Durchmesser CT, CU bestimmt; wie findet man sie?

Auflösung. Die Gleichung (9) giebt offenbar für $t=0$ den halben Durchmesser $u=\pm$ CU, und für $u=0$ den andern halben Durchmesser $t=\pm$ CT. Setzen wir also der Kürze wegen: CT $=$ A, CU $=$ B, so ist:

$$A^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}\ \ldots\ldots\ldots(10)$$

$$B^2 = \frac{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha}{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}\ \ldots\ldots\ldots(11)$$

Aus (10) und (11) folgt:

$$a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha = \frac{a^2b^2}{A^2}$$

$$a^2b^2\frac{(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)}{a^4\sin^2\alpha+b^4\cos^2\alpha)} = \frac{a^2b^2}{B^2}$$

Diese Ausdrücke der Coefficienten von u^2 und t^2 in (9) substituirt, erhält man folgende, mit der gewöhnlichen Gleichung der Ellipse sehr ähnliche:

---

*) Nach bekannten goniometrischen Formeln ist immer (Trig. § 100, 5):

$$\sin^2 a = \frac{\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a}\ \text{und}\ \cos^2 a = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 a}$$

$$A^2 u^2 + B^2 t^2 = A^2 B^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Wäre $A = B$, so stimmte die Form dieser Gleichung mit der des Kreises überein, aus welcher deshalb aber kein Kreis, sondern, weil die Coordinaten u, t schiefwinklige sind, eine Ellipse hervorgeht.

86.

Addirt man die Gleichungen (10) und (11), so folgt, als eine merkwürdige Eigenschaft der Ellipse: dass die Summe der Quadrate je zweier Durchmesser von dem Winkel α (oder von dem dadurch bestimmten Verbindungswinkel ε) ganz unabhängig, und immer gleich der Summe der Quadrate der grossen und kleinen Achse ist. Denn:

$$A^2 + B^2 = \frac{a^2 b^2 + a^4 \sin^2\alpha + b^4 \cos^2\alpha}{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}$$

Nun ist aber $a^2 b^2 = a^2 b^2 \sin^2\alpha + a^2 b^2 \cos^2\alpha$. Dies substituirt, ist auch:

$$A^2 + B^2 = \frac{a^2 \sin^2\alpha (a^2 + b^2) + b^2 \cos^2\alpha\, (a^2 + b^2)}{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}$$

$$A^2 + B^2 = a^2 + b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

87.

Als eine andere von den Haupteigenschaften der Ellipse wollen wir noch anführen, dass die Producte aus je zwei verbundenen Durchmessern und dem Sinus ihres Verbindungswinkels immer gleich, und gleich dem Producte aus der grossen und kleinen Achse sind. Denn aus (10) und (11) folgt:

$$A^2 \cdot B^2 = a^2 b^2 \frac{(a^4 \sin^2\alpha + b^4 \cos^2\alpha)}{(a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha)^2}$$

Nun ist aber nach der Gleichung (7) § 84:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{a^2 \operatorname{tg}\alpha + b^2 \cot\alpha}{b^2 - a^2}$$

$$\text{daher } \sin^2 \varepsilon = \frac{(a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha)^2}{a^4 \sin^2\alpha + b^4 \cos^2\alpha}$$

Dies substituirt kommt:

$$AB \cdot \sin \varepsilon = ab \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Siebentes Buch.

Räumliche Bedeutung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades.

88.

Aufgabe. Zu zeigen, dass jede beliebige Gleichung zweiten Grades zwischen x, y, wenn überhaupt eine krumme Linie, nothwendig einen der Kegelschnitte (Kreis, Parabel, Ellipse, Hyperbel) darstellt.

Auflösung. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades lässt sich unter folgender Form darstellen:

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

indem man einen etwaigen Coefficienten von y^2 durch Division fortschaffen kann; auch können wir annehmen, dass x, y rechtwinklige Coordinaten sind, indem man sie sonst, nach § 73, (4), (5) leicht in solche verwandeln könnte.

Wir haben demnach zu untersuchen, wie viele verschiedene Arten krummer Linien aus dieser Gleichung hervorgehen, wenn für die Coefficienten a, b, c, d, e alle denkbaren, sowohl positiven als negativen Zahlen, selbst 0 nicht ausgenommen, gesetzt werden, so jedoch, dass dadurch y nicht imaginär wird, in welchem Falle die Gleichung sich gar nicht construiren liesse. (Vergl. § 66.)

Durch eine Coordinaten-Verwandlung können wir aus vorstehender sechsgliedrigen Gleichung zwischen x, y eine einfachere, für unsere Untersuchung bequemere zwischen den ebenfalls recht-

winkligen Coordinaten t, u ableiten, die nur **drei** Glieder enthält, und in Bezug auf u eine **reine** quadratische ist.

Sind nämlich m, n die noch unbekannten Coordinaten des neuen Anfangspuncts, und θ der noch unbekannte Winkel, den die neue Achse OT mit der alten AX macht, so ist bekanntlich, [mögen m, n positiv oder negativ ausfallen, und θ spitz oder stumpf sein (§ 72)], immer:

$$\begin{aligned} x &= m + t\cos\theta - u\sin\theta \\ y &= n + t\sin\theta + u\cos\theta \end{aligned}$$

Substituiren wir also diese Werthe von x, y in die allgemeine Gleichung (1), so erhalten wir folgende neue Gleichung zwischen t, u:

$$\left.\begin{array}{l} (n+t\sin\theta+u\cos\theta)^2+a(m+t\cos\theta-u\sin\theta)(n+t\sin\theta+u\cos\theta) \\ b(m+t\cos\theta-u\sin\theta)^2+c(n+t\sin\theta+u\cos\theta) \\ \qquad\qquad +d(m+t\cos\theta-u\sin\theta)+e \end{array}\right\} = 0$$

oder entwickelt und geordnet:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \cos^2\theta \\ -a\sin\theta\cdot\cos\theta \\ b\sin^2\theta \end{array}\right\}\cdot u^2 + \left.\begin{array}{r} \sin^2\theta \\ a\sin\theta\cos\theta \\ b\cos^2\theta \end{array}\right\}\cdot t^2 + \left.\begin{array}{r} 2n\sin\theta \\ am\sin\theta \\ an\cos\theta \\ 2bm\cos\theta \\ c\sin\theta \\ d\cos\theta \end{array}\right\}\cdot t \\ \left.\begin{array}{r} 2\sin\theta\cdot\cos\theta \\ a\cos^2\theta \\ -a\sin^2\theta \\ -2b\sin\theta\cos\theta \end{array}\right\}\cdot ut + \left.\begin{array}{r} 2n\cdot\cos\theta \\ am\cos\theta \\ -an\sin\theta \\ -2bm\sin\theta \\ c\cos\theta \\ -d\sin\theta \end{array}\right\}\cdot u + \left.\begin{array}{r} n^2 \\ amn \\ bm^2 \\ cn \\ dm \\ e \end{array}\right\} \end{array}\right\} = 0 \ldots (2)$$

Werden nun die drei Grössen m, n, θ so genommen, dass:

$$\begin{aligned} 2\sin\theta\cos\theta+a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2b\sin\theta\cos\theta &= 0 \ldots (3) \\ (2n+am+c)\cos\theta-(2bm+an+d)\sin\theta &= 0 \ldots (4) \\ n^2+amn+bm^2+cn+dm+e &= 0 \ldots (5) \end{aligned}$$

was, wie man sieht, immer möglich ist,*) so fallen aus der Gleichung (2) die drei letzten Glieder heraus, und wir erhalten,

---

*) Aus Gleichung (3) folgt z. B.: $a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=2\sin\theta.\cos\theta(b-1)$ oder (Trigon. § 100, 17) $a.\cos 2\theta=\sin 2\theta(b-1)$, woraus: $\operatorname{tg} 2\theta=\frac{a}{b-1}$.

indem wir zugleich durch den Coefficienten von u^2 dividiren, und zur Abkürzung:

$$\frac{\sin^2\theta + a\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta}{\cos^2\theta - a\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta} = g \ldots\ldots (6)$$

$$\frac{(2n + am + c)\sin\theta + (2bm + an + d)\cos\theta}{\cos^2\theta - a\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta} = f \ldots (7)$$

setzen, die einfache Gleichung zwischen u, t:

$$u^2 + g\cdot t^2 + f\cdot t = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Die durch a, b, c, d, e bestimmten Werthe von m, n, θ könnte man aus (3), (4), (5), und dann g und f aus (6) und (7) berechnen. Für unseren Zweck brauchen wir jedoch diese Werthe von m, n, θ, f, g nicht zu kennen. Uns genügt zu wissen, dass, wenn die Gleichung (1) wirklich eine krumme Linie enthält (y nicht imaginär wird), wir daraus durch die gezeigte Coordinaten-Verwandlung die weit einfachere Gleichung (8) ableiten können, welche noch dieselbe krumme Linie giebt. Die Art dieser krummen Linie hängt, wie wir gleich sehen werden, blos von dem Coefficienten g ab, und ist eine andere, je nachdem g positiv, negativ oder Null ist.

Wäre nun, um alle drei Fälle durchzugehen, in (8):

1. $g = 0$; so ist die daraus entspringende Linie:

$$u = \sqrt{-f\cdot t}$$

welche offenbar, f mag positiv oder negativ sein, eine Parabel ist, deren Parameter $= f$ (§ 25, Anmerkung).

2. Wäre g positiv, so hat man:

$$u = \sqrt{-ft - gt^2}$$

Dies ist aber (§ 70), f mag positiv oder negativ sein, die Scheitelgleichung einer Ellipse, welche sich leicht auf die gewöhnliche Mittelpunctsgleichung reduciren lässt, denn, sind α, β ihre halbe, grosse und kleine Achsen, so ist: $\alpha = \frac{f}{2g}$ und $\beta = \sqrt{\frac{f^2}{4g}}$ etc. Für $g = 1$ ist die Linie ein Kreis.

3. Wäre g negativ, so hat man, f mag positiv oder negativ sein:

$$u = \sqrt{-ft + gt^2}$$

als die Scheitelgleichung einer Hyperbel (§ 70).

4. Die Fälle, wo durch die Coordinaten-Verwandlung in (2) der Coefficient von u^2, oder in (8) blos f oder f und g zugleich Null werden, nämlich:

$$gt^2 + ft = 0$$
$$u^2 + gt^2 = 0$$
$$u^2 = 0$$

führen entweder auf nichts, auf einen Punct, auf eine oder auf zwei grade Linien. Diese Fälle sind aber aus der ursprünglichen Gleichung (1) selbst leicht zu erkennen.

Hiernach können wir also behaupten, dass jede Gleichung zweiten Grades, wenn überhaupt eine krumme Linie, immer einen der erwähnten Kegelschnitte giebt.

89.

Ein aufmerksamer Leser wird die Bemerkung gemacht haben, dass nach Gleichung (3) der Winkel θ und folglich auch vermöge Gleichung (6) der Coefficient g durch die Coefficienten a und b bestimmt ist, und folglich die Art der aus der Gleichung:

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0 \ldots\ldots. (1)$$

hervorgehenden krummen Linie von den Coefficienten c, d, e ganz unabhängig ist, und blos von den beiden Coefficienten a, b abhängt. Man kommt deshalb auf die Frage: wie diese, die Art der krummen Linie bestimmenden Coefficienten a, b beschaffen sein müssen, damit die Gleichung (1) einen der Art nach bestimmten Kegelschnitt gebe, mit andern Worten: nach welchem Kennzeichen man aus dem Anblick einer Gleichung zweiten Grades sofort entscheiden kann, was für einen Kegelschnitt sie enthält.

Diese Kennzeichen könnte man aus der Gleichung (6) finden, indem wir durch Hülfe der Gleichung (3) g durch a und b ausdrückten und zusähen, welches Verhältniss unter a und b Statt finden muss, damit das dadurch bestimmte g Null, positiv oder negativ wird.

Da wir aber bereits wissen, was für krumme Linien aus einer Gleichung zweiten Grades hervorgehen können, so findet man das erwähnte Kennzeichen leichter aus der ursprünglichen

Gleichung (1), denn lösen wir diese verwickelte quadratische Gleichung in Bezug auf y, so kommt: *)

$$y = -\frac{(ax+c) \pm \sqrt{(a^2-4b)x^2+2(ac-2d)x+(c^2-4e)}}{2}$$

oder kürzer geschrieben:

$$y = -\tfrac{1}{2}(ax+c) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{Ax^2+Bx+C} \;\ldots\ldots\; (2)$$

Der rationale Theil dieser Gleichung, für sich construirt, giebt eine grade Linie, welche die Abscissen-Achse AX unter einem Winkel schneidet, dessen trigonometrische Tangente $= -\frac{1}{2}a$ ist. Zu jeder, für ein beliebiges x erhaltenen Ordinate dieser graden Linie muss nun aber noch das Stück, welches der irrationale Theil für dasselbe x giebt, wegen des doppelten Vorzeichens, sowohl addirt, als auch davon subtrahirt werden, so dass also jene grade Linie, welche aus dem rationalen Theil entspringt, ein Durchmesser für die aus dem irrationalen Ausdruck hervorgehende krumme Linie wird.

Ob nun diese Linie, längs der einen Seite des Durchmessers, mit zwei, oder nach beiden Seiten mit vier Zweigen unbegrenzt fortläuft, oder in sich begrenzt ist, ob sie folglich, wonach wir eigentlich fragen, eine Parabel oder Hyperbel oder Ellipse ist, darüber giebt uns der Coefficient $A = a^2 - 4b$ Auskunft.

Sind a und b so beschaffen, dass:

1. der Coefficient A positiv, also $a^2 > 4b$ ist, so wird das erste Glied unter dem Wurzelzeichen (Ax^2) für wachsende Werthe von x doch einmal grösser, als die Summe der beiden andern ($Bx + C$), wenn auch B und C zugleich negativ

---

*) Fehlte in dieser Gleichung y^2, so könnte man sie auf die dann als abhängig betrachtete veränderliche Grösse x reduciren, und dieselben Schlüsse gelten dann für x; oder man könnte in diesem Falle auch x, y mit einander verwechseln (§ 67 a)..

Wären, als zweiter besonderer Fall, die Coefficienten von y^2 und x^2 zugleich Null, so lässt sich die Gleichung $axy + cy + dx + e = 0$ durch blosse Verlegung des Anfangspuncts A nach $0\left(-\frac{c}{a}, -\frac{d}{a}\right)$, indem man $x = t - \frac{c}{a}$ und $y = u - \frac{d}{a}$ setzt, in die einfachere Gleichung $aut + e - \frac{cd}{a} = 0$ oder, $\frac{cd - ae}{a^2} = m^2$ gesetzt, in $u = \frac{m^2}{t}$ verwandeln, welches offenbar (zufolge § 57) die auf die Asymptoten bezogene Gleichung einer Hyperbel ist.

wären*), und da dann sowohl zu jedem positiven, als negativen x zwei gleiche, entgegengesetzte und reelle Werthe aus der Wurzelgrösse entspringen, so geht die Linie längs beiden Seiten des Durchmessers mit vier Aesten in's Unendliche fort, und ist folglich eine Hyperbel.

Wäre, als besonderer Fall, für ein positives A zu gleicher Zeit $B=0$, $C=0$, so giebt die Gleichung (2):

$$y = -\frac{ax+c}{2} \pm \frac{\sqrt{A}}{2} \cdot x$$

nämlich zwei grade Linien:

$$y = \frac{(\sqrt{A} - a)}{2} \cdot x - \frac{c}{2}$$

$$\text{und } y = -\frac{(\sqrt{A} + a)}{2} \cdot x - \frac{c}{2}$$

welche sich in einem Puncte schneiden, dessen Abscisse $= 0$ und Ordinate $= -\frac{1}{2}c$ ist.

Wäre die Grösse unter dem Wurzelzeichen ein vollkommenes Quadrat, so giebt die Gleichung (1) ebenfalls zwei grade Linien, und ist sowohl in diesem, als im vorhergehenden besondern Falle eine zusammengesetzte, oder ein Product aus den Gleichungen beider Linien.**)

2. Ist der Coefficient A negativ, also $a^2 < 4b$, und C positiv, so lassen sich, wenn B positiv ist, so kleine positive, und wenn B negativ ist, so kleine negative Werthe für x setzen,

---

*) Damit $Ax^2 > Bx + C$, also auch $x^2 - \frac{B}{A} \cdot x + \left(\frac{B}{2A}\right)^2 > \frac{C}{A} + \left(\frac{B}{2A}\right)^2$ werde, braucht man nur $x > \frac{B \pm \sqrt{B \;\; + 4A^2 C}}{2A}$ zu nehmen.

**) Multiplicirt man zwei auf Null reducirte Gleichungen ersten Grades mit einander, so ist das Product vom zweiten Grade, und giebt, construirt, zwei grade Linien (v. Seite 26, 3, 4). Es war also vorauszusehen, dass in der allgemeinen Gleichung zweiten Grades, wenn man für die Coefficienten a, b, c... alle möglichen Werthe gesetzt denkt, als besonderer Fall, auch die zusammengesetzte Gleichung zweier graden Linien mit begriffen sein muss. Ferner, dass in der allgemeinen Gleichung dritten Grades zugleich auch die Producte aus drei, auf 0 reducirten Gleichungen ersten Grades, oder einer Gleichung vom ersten und einer vom zweiten Grade, mithin sowohl drei grade Linien, als auch eine grade Linie mit einem Kegelschnitt verbunden, als besondere Fälle, enthalten sind. Kurzum, dass die allgemeine Gleichung vom $n$ten Grade alle zusammengesetzten Linien vom ersten bis zum $n-1$ Grade, in allen möglichen, jedoch den $n$ten Grad nicht übersteigenden Verbindungen, als besondere Fälle, mit begreift.

dass die Grösse unter dem Wurzelzeichen eine Weile positiv bleibt, mithin die Wurzeln daraus reell sind. Die krumme Linie ist dann eine Ellipse, und für $b=1$, $a=0$ ein Kreis (§ 20).

Wäre für ein negatives A zugleich B und C negativ, so hat man entweder gleichfalls eine Ellipse, oder y ist imaginär. Letzteres ist durchaus der Fall, wenn $B=0$, und A und C negativ sind.

Wäre $B=0$, $C=0$, und A negativ, so giebt die Gleichung:

$$y=-\frac{ax+c}{2}\pm x\cdot\sqrt{A}\cdot\sqrt{-1}$$

also einen Punct, dessen Abscisse $=0$, und dessen Ordinate $=-\frac{1}{2}c$.

3. Ist $A=0$, also $a^2=4b$, so giebt die Wurzelgrösse, wenn B positiv ist, für positive, und wenn B negativ ist, für negative x zwei gleiche entgegengesetzte Werthe, die mit x wachsen (C möge dabei positiv, negativ oder Null sein), und die krumme Linie geht in diesem Falle mit zwei Aesten in's Unendliche fort und ist folglich eine Parabel.

Wäre, als besonderer Fall, für $A=0$, auch $B=0$, so giebt die Gleichung, wenn C positiv ist, zwei grade parallele Linien: $y=-\frac{(ax+c)}{2}\pm\sqrt{C}$, und wenn C negativ ist: $y=-\frac{ax+c}{2}+\sqrt{-C}$, also nichts.

Wir erhalten demnach aus einer Gleichung zweiten Grades, wenn überhaupt eine krumme Linie, für:

$a^2>4b$ eine Hyperbel,
$a^2<4b$ eine Ellipse,
$a^2=4b$ eine Parabel.

90.

Weil in der allgemeinen Gleichung zweiten Grades:

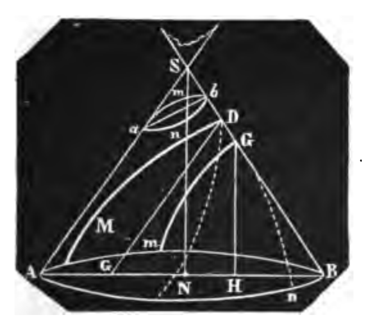
$$y^2+axy+bx^2+cy+dx+e=0$$

fünf beständige Grössen, a, b, c, d, e, vorkommen, so muss man daraus schliessen, dass man durch je fünf beliebig gegebene Puncte (von welchen jedoch, von selbst verstanden, keine drei in grader Linie liegen) immer einen Kegelschnitt legen kann. Denn die fünf Puncte geben, durch (rechtwinklige) Coordinaten ausgedrückt, fünf Bedingungsgleichungen, durch welche a, b, c, d, e bestimmt werden, und die beiden ersten, a und b, bestimmen

dann, nach dem oben angegebenen Kennzeichen, was für ein Kegelschnitt es ist.

91.

Die drei Linien: Parabel, Ellipse und Hyperbel werden aus dem Grunde oftmals mit dem allgemeinen Namen Kegelschnitte benannt, weil sie auf der Oberfläche eines Kegels entstehen, wenn man denselben mittelst einer Ebene nach folgenden drei verschiedenen Richtungen schneidet:



1. Geht der Schnitt *ab* schräg gegen die Achse durch die beiden Seitenlinien, so entsteht auf der Oberfläche des Kegels eine Ellipse *ambn*.

2. Geht der Schnitt DG mit einer Seitenlinie des Kegels SA parallel, so ist der Durchschnitt MDN auf der Oberfläche des Kegels eine Parabel.

3. Geht der Schnitt GH mit der Achse SC parallel (oder doch durch beide entgegengesetzte Kegel), so entsteht auf der Oberfläche eine Hyperbel, *m*G*n*, deren entgegengesetzte man sich auf der Oberfläche des entgegengesetzten Scheitelkegels denken kann.

(Zu den Kegelschnitten könnte man noch zählen: den Kreis, als einen auf der Achse senkrechten, und die graden Linien SA, SB, als einen längs durch die Achse gehenden Schnitt, ASB.)

Da wir die Gleichungen für die sogenannten Kegelschnitte bereits kennen, so ist es überflüssig, sie hier nochmals wieder, zur Bestätigung des Gesagten, aus den gezeigten Schnitten selbst abzuleiten.

92.

Nach § 36 und 41 ist sowohl in der Ellipse, als auch in der Hyperbel, die zweite Achse $2b$ die mittlere Porportionale zwischen der ersten Achse $2a$ und dem Parameter p. In Zeichen:

$$\tfrac{1}{2}p : b = b : a$$
$$b^2 = \tfrac{1}{2}ap$$

Die Gleichung der Ellipse vom linken Scheitel aus (§ 70) ist:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

oder, wenn man statt der kleinen Achse den Parameter einführt:

$$y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2$$

und die Scheitelgleichungen der Hyperbel und Parabel sind für einen gleichen Parameter, p, beziehungsweise:

$$y^2 = px + \frac{p}{2a}x^2$$
$$y^2 = px$$

Wir können daher alle drei Kegelschnitte durch die Gleichung:

$$y^2 = px + qx^2 \text{ .... } (1)$$

darstellen. Und je nachdem hierin q positiv, negativ oder Null ist, giebt sie die Hyperbel, Ellipse, Parabel.

93.

Construirt man über eine gemeinschaftliche Abscissen-Achse, AX, die drei Scheitelgleichungen für die Hyperbel, Parabel und Ellipse nämlich:

$$y^2 = px + qx^2$$
$$y^2 = px$$
$$y^2 = px - qx^2$$

so ist klar, dass, wenn man den Lauf der drei Linien mit einander vergleicht, die Parabel (Vergleichungslinie) zwischen den beiden andern liegt, und zwar die Hyperbel darüber weg geht, der Ellipse aber etwas mangelt, um dieselbe Höhe zu erreichen. Die gesperrten Wörter enthalten den Sinn der griechischen. Und dies ist die muthmassliche Veranlassung für die Benennung der Kegelschnitte.

Achtes Buch.

Von den Spiralen.

94.

Jede krumme Linie, deren analytisches Bildungsgesetz eine Polargleichung, $r = F(\omega)$, ist, in welcher jedoch die unabhängig veränderliche Grösse ω ein blosser Bogen ist, heisst im Allgemeinen eine Spirale, obwohl man, im Besondern, nur solche krumme Linien so zu nennen pflegt, welche in schneckenförmigen Windungen um den Pol herumgehen.

Da nun eine solche Polargleichung, $r = F(\omega)$, durch blosse Steigerung der Exponenten der veränderlichen Grössen unzählige mal verändert werden kann, so folgt schon hieraus, dass es unzählig verschiedene Spiralen giebt, dass sie aber, ebenso wie die algebraischen Linien, nach dem Grade ihrer Gleichungen in Classen ersten, zweiten, dritten Grades .... getheilt werden könnten.

Auffallend ist die Verschiedenheit der Gestalten, welche durch die blosse Vertauschung der Parallel-Coordinaten x, y gegen die Polar-Coordinaten ω, r aus sonst ähnlich geformten Gleichungen entstehen.

I. Spiralen ersten Grades.

95.

Aus der allgemeinen Gleichung der graden Linien:

$$y = ax + b$$

folgt, indem wir x, y gegen ω, r vertauschen, die allgemeine Gleichung der Spiralen ersten Grades, gleichsam die Metamorphose der graden Linie:

$$r = a \cdot \omega + b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Um diese nach der in der Einleitung (Seite 17) gegebenen Vorschrift zu construiren, beschreiben wir mit einer beliebig gross genommenen Linear-Einheit, AP=1, einen Abscissenkreis, dessen Umfang also $= 2\pi = 6{,}283\ldots\ldots$ und auf welchem wir von einem beliebigen Anfangspunct, A, aus, die für ω gesetzten und durch dieselbe Längen-Einheit ausgedrückten Kreis-Abscissen, und zwar die positiven rechts, die negativen links herum, so wie die entsprechenden Werthe von r auf den, durch den Endpunct der Kreis-Abscissen und den Pol gehenden Leitstrahlen, vom Pol aus, die positiven vorwärts, die negativen rückwärts abtragen, und die dadurch bestimmten Puncte durch einen freien Zug verbinden.



Um zu finden, ob und in welcher Richtung die Spirale durch den Pol geht, suchen wir den Werth von ω, für welchen $r = 0$ wird. Aus $a\omega + b = 0$ folgt: $\omega = -\frac{b}{a}$. Ist nun $AO = -\frac{b}{a}$, so können wir den zuerst willkürlich gesetzten Anfangspunct A um diesen Bogen zurückschieben, und ihn jetzt in 0 annehmen. Bezeichnen wir mit θ die von 0 aus gerechneten Kreis-Abscissen (Winkeldrehung), so müssen wir in die Gleichung (1): $\theta - \frac{b}{a}$ statt ω setzen. Durch diese Coordinaten-Verwandlung erhalten wir die einfachere Gleichung $r = a\left(\theta - \frac{b}{a}\right) + b$, nämlich:

$$r = a \cdot \theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

welche noch dieselbe Spirale, vom Pol ausgehend, giebt. Wäre z. B. $a = \frac{1}{2}$, also:

$$r = \tfrac{3}{8}\,\theta$$

so hat man für:

$$\theta = 0,\ \tfrac{1}{6}.2\pi,\ \tfrac{2}{6}.2\pi,\ \tfrac{3}{6}.2\pi \ldots \tfrac{6}{6}.2\pi,\ \tfrac{7}{6}.2\pi \ldots\ldots \tfrac{n}{6}.2\pi$$
$$r = 0,\ \ \tfrac{1}{8}\pi,\ \ \tfrac{2}{8}\pi,\ \ \tfrac{3}{8}\pi \ldots\ldots \tfrac{6}{8}\pi,\ \ \tfrac{7}{8}\pi \ldots\ldots\ldots \tfrac{n}{8}\pi$$
$$0.39\ldots,\ 0.78,\ 1.18 \ldots\ldots 2{,}35 \ldots\ldots\ldots$$

für negative Werthe von $\theta, = -\tfrac{1}{6}.2\pi,\ -\tfrac{2}{6}.2\pi \ldots\ldots\ldots$, erhält man dieselben, jedoch negativen $r, = -\tfrac{1}{8}\pi,\ -\tfrac{2}{8}\pi \ldots$

Man sieht also, dass alle Spiralen ersten Grades mit zwei gleichen Zweigen vom Pol aus in entgegengesetzten, immer grösser werdenden Windungen, unzählige mal um denselben herumgehen. Denn für $\theta = \pm\infty$ ist auch $r = \pm\infty$. Für jedes $\theta = \pm(2n + \tfrac{3}{2})\pi$ und $\theta = \pm(2n + \tfrac{1}{2})\pi$ giebt es einen Durchschnittspunct, die ersteren oben, die anderen unten, und alle diese Puncte liegen folglich in einer graden Linie, welche die Spirale halbirt und deshalb ein Durchmesser derselben genannt wird.

Auch sieht man, dass der Radius vector dem Polarwinkel proportional wächst, und dass die Windungen eines Zweiges immer in gleicher Entfernung sind, folglich jede vom Pol aus durch sie gehende grade Linie in gleiche Theile theilen. Denn suchen wir, um dieses zu beweisen, die Differenz zweier Leitstrahlen, r, r', für zwei, um eine ganze Umdrehung verschiedene Kreis-Abscissen, $\theta = n \cdot 2\pi$ und $\theta' = (n+1)\ 2\pi$, so ist:

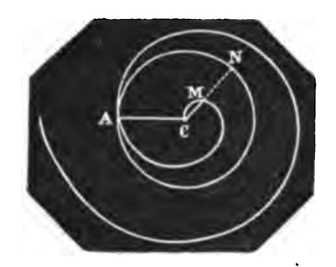
$$\begin{aligned} r &= a \cdot n \cdot 2\pi \\ r' &= a \cdot (n+1) \cdot 2\pi \\ \hline r' - r &= 2a\pi \end{aligned}$$

und wegen dieser beständigen Differenz wäre es also leicht, die Spirale zu construiren.

96.

Die Spirale des Conon von Syracus, oder auch die Archimedische genannt, weil Archimedes zuerst ihre Haupteigenschaft entdeckte, entsteht auf folgende Weise:

Indem sich der Radius AC gleichmässig wiederholt um den Mittelpunct C dreht, tritt zu gleicher Zeit ein, die Spirale beschreibender Punct aus dem Pol C, und schreitet ebenfalls gleichmässig so auf dem kreisenden Radius und dessen Verlängerung fort, dass er darauf für jede ganze Umdrehung einen, dem Radius gleichen Weg zurücklegt. Wie findet man die Gleichung dieser Spirale?



Auflösung. Sei der Radius des Kreises $AC = a$, der Radius vector $CM = r$, der Polarwinkel $= \theta$, so ist, weil sich hier der Leitstrahl r zum Radius a verhält, wie der Bogen θ zum Umfange des Kreises, dessen Rad. $= 1$:

$$r : a = \theta : 2\pi$$

$$r = \frac{a}{2\pi} \cdot \theta$$

Die Archimedische Spirale ist also vom ersten Grade.....
Für $\theta = 2\pi$ ist $r = a$; für $\theta = 2 \cdot 2\pi$ ist $r = 2a$ etc.



Anmerkung. Die sog. Schneckenlinie, welche mit einer Spirale ersten Grades Aehnlichkeit hat, jedoch nicht damit verwechselt werden darf, besteht aus an einander gefügten Halbkreisen, die man über eine grade Linie, den einen oberhalb, den anderen unterhalb, aus zwei wechselnden Mittelpuncten, a und b, beschreibt, indem man den Durchmesser eines beschriebenen Halbkreises zum Radius des folgenden nimmt.

II. Spiralen zweiten Grades.

97.

Setzt man in die Gleichungen der drei Kegelschnitte die Polar-Coordinaten θ, r statt der rechtwinkligen x, y, so erhält man drei verschiedene Spiralen, welche nach dem Ursprung und ähnlichen Bau ihrer Gleichungen Spiral-Parabel, Spiral-Ellipse und Spiral-Hyperbel genannt werden.

98.

Die Gleichung der Spiral-Parabel ist:

$$r = \sqrt{p\theta}$$

Sie giebt, wegen des doppelten Vorzeichens der Wurzel, für jeden Werth von θ zwei gleiche und entgegengesetzte Leitstrahlen; die mit θ bis in's Unendliche wachsen; denn für $\theta = \infty$ ist $r = \pm \infty$.



Die Spiral-Parabel geht also mit zwei gleichen Zweigen vom Pol aus in entgegengesetzten, immer grösseren, doch immer näher rückenden Windungen in's Unendliche fort, und hat unzählig viele Durchmesser.

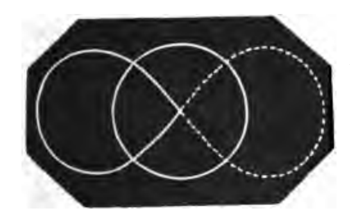
99.

Die Gleichung der Spiral-Ellipse ist:

$$r = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - \omega^2)} \dots\dots\dots\dots (1)$$

oder wenn man den Anfangspunct der Kreis-Abscissen um den Bogen $= a$ zurücklegt (damit die Spirale vom Pol ausgeht und beide veränderliche Coordinaten zugleich Null werden) und die neue Kreis-Abscisse mit θ bezeichnet, so ist in obiger Gleichung $\omega = \theta - a$ und folglich:

$$r = \frac{b}{a}\sqrt{(2a\theta - \theta^2)} \dots\dots\dots (2)$$



Beide Gleichungen geben einerlei Spirale. Sie ist endlich, hat die Gestalt einer Schleife oder der Ziffer 8 und unzählige Durchmesser.

100.

Die Gleichung der Spiral-Hyperbel ist:

$$r = \frac{b}{a}\sqrt{(\theta^2 - a^2)} \dots\dots\dots\dots (1)$$

oder wenn die Spirale von dem zum Pol angenommenen Punct ausgehen, d. h. für $\theta = 0$ auch $r = 0$ sein soll:

$$r = \frac{b}{a}\sqrt{(2a\theta + \theta^2)} \dots\dots\dots (2)$$

Diese Spirale zieht sich mit zwei gleichen, vom Pol aus-

gehenden, immer enger anschliessenden Windungen in's Unendliche hinein, hat unzählig viele Durchmesser und Kreuzungen, welche in zwei auf einander senkrechten Achsen liegen (siehe auch § 57: $r = \frac{a}{\theta}$).

101.

Eine sehr merkwürdige Spirale, und die auch schon practisch benutzt worden, ist die sogenannte Exponential-Spirale, ihre Gleichung ist:

$$r = e^{\theta}$$

wo $e > 1$. Diese Spirale kommt dem Pol in immer engeren Windungen immer näher und näher, ohne ihn jedoch zu erreichen; denn für $\theta = 0$ ist $r = 1$. Je grösser $+\theta$, je grösser r und je grösser $-\theta$, je kleiner r; für $\theta = +\infty$ ist $r = \infty$; für $\theta = -\infty$ ist $r = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}}$.

Anmerkung. Was die Entdeckung der Eigenschaften dieser und anderer (übrigens noch wenig untersuchten) Spiralen, so wie die Berechnung ihrer Längen, Flächen etc. betrifft, so ist dazu Kenntniss der Infinitesimalrechnung erforderlich, und wir müssen deshalb auf die Differential- und Integral-Rechnung verweisen, woselbst auch die Methode der Tangenten gelehrt wird. Dasselbe gilt auch von den meisten algebraischen krummen Linien, so wie auch, wenn es darauf ankommt, krumme Linien von geforderten mechanischen oder anderen Eigenschaften zu entdecken. Wir müssen uns hier begnügen, durch das Bisherige und noch Folgende, die dazu nothwendigen Vorkenntnisse gegeben zu haben.



ZWEITER THEIL.

Analytische Geometrie im Raume.

Neuntes Buch.

Vorbegriffe über Lagenbestimmung, Erzeugung und Projection einer Grösse im Raume.

Wir können dem Anfänger nicht verhehlen, dass dieser Theil der analytischen Geometrie, mit dreien Coordinaten, abstracter und schwerer ist, als der mit zweien Coordinaten, aus demselben Grunde, aus welchem die Elementar-Geometrie im Raume schwerer ist, als die in der Ebene, weil nämlich in perspectivischer Zeichnung nicht alle Theile einer Grösse in ihrer wirklichen Lage und Verhältniss gegen einander erscheinen können, und oftmals sich gar nicht bildlich darstellen, sondern nur denken lassen. Fleissige Uebung und Ausdauer werden jedoch die anfänglichen Schwierigkeiten bald überwinden.

102.

So wie man in der Ebene liegende Linien dadurch erzeugen kann, dass man beliebige Functionen zweier veränderlichen Grössen, (x, y), aufstellt, und je zwei zusammengehörende Werthe der willkürlich und abhängig veränderlichen Grössen durch proportionirte, auf zwei beliebig gegen einander geneigten Achsen, AX, AY, vom Anfangspunct A abgemessene Coordinaten darstellt, so kann man auch räumliche Grössen (Flächen) erzeugen, indem man beliebige Functionen dreier veränderlichen Grössen, $\varphi(x, y, z) = 0$, aufstellt, zwei davon, z. B. x, y, als beliebig, die dritte z aber als die abhängig veränderliche betrachtet, und dann je drei zusammengehörende Werthe derselben, durch proportionirte,

unter beliebigen, aber beständigen Coordinatenwinkeln verbundenen, oder was dasselbe ist, drei beliebig gegen einander geneigten Achsen, AX, AY, AZ, parallele Linien, darstellt, indem man A zum Anfangspunct nimmt.

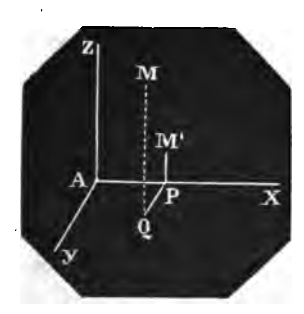
So lange nicht ein Anderes ausdrücklich erwähnt wird, sollen die drei Achsen auf einander senkrecht sein.

103.

Zur Erläuterung sei z. B.:

$$z = x^2 - 2x + 3y + 1$$

Nimmt man in dieser Gleichung für x und y ganz beliebige Werthe an, z. B. $x = 2$, $y = 1$, so wird $z = 4$.



Misst man nun nach einer beliebigen Linear-Einheit, AP $= x = 2$ und QP $= y = 1$, ab, und denkt man sich auf der Ebene $x\mathrm{A}y$, im Puncte Q, das mit der Achse Az parallele Perpendikel MQ $= z = 4$ errichtet, so ist durch diese drei Coordinaten $x = 2$, $y = 1$, $z = 4$, die Lage des Punctes M im Raume gegen die drei Achsen vollkommen bestimmt.

Setzt man in obige Gleichung $x = 2$, $y = 0$, so wird $z = 1$, und diese drei Coordinaten (2, 0, 1) bestimmen die Lage des Punctes M' (welcher also, weil $y = 0$, in der Ebene $x\mathrm{A}z$ liegt). Für $x = 2$, $y = 2$ ist $z = 7$. Für $x = 0$, $y = 0$ ist $z = 1$ etc.

Denkt man sich so weiter für x alle möglichen Werthe gesetzt, und zu jedem derselben alle möglichen Annahmen für y gemacht, und die zugehörigen Ordinaten z berechnet, so erhält man eine stetige Folge von Puncten, welche offenbar nicht mehr in einer Linie, sondern in einer Fläche liegen, deren Form, Ausdehnung und Eigenschaft durch die beliebig angenommene Gleichung vollkommen bestimmt ist.*)

*) Die drei auf einander senkrechten Achsen Ax, Ay, Az, von welchen man sich die beiden erstern als horizontal und die dritte als vertical denken mag, lassen sich nicht gut anders, als hier geschehen, versinnlichen. Der Anfänger, dem diese Zeichnung, in welcher die Winkel APQ, MQP als rechte gedacht werden müssen, zu verwirrt sein sollte, ziehe auf dem Papiere zwei auf einander senkrechte Achsen, xx, yy, und stecke in den

104.

Wird in einer Gleichung dreier veränderlichen Grössen, $z = \varphi(x, y)$, die abhängige Grösse z durch Ausziehung irgend einer Wurzel bestimmt, so kann, je nach der Form der Gleichung, die darin enthaltene Fläche eine endliche, eine unendliche oder auch eine in sich zurücklaufende sein. Ist z stets imaginär, so giebt es gar keine Fläche. Giebt die Gleichung $z = \varphi(x, y)$ für z verschiedene Wurzeln, so kann die Gleichung zugleich mehre Flächen enthalten, die, den Umständen nach, keinen, einen oder mehre Puncte, eine oder mehre Durchschnittslinien gemein haben. (Vergl. Einl. V.)

105.

Die drei auf einander senkrechten Coordinaten-Achsen der x, der y und der z bestimmen die Lage dreier auf einander senkrechten Ebenen, welche man Coordinaten-Ebenen nennt, und zwar heisst die durch die beiden Achsen xx, yy bestimmte Ebene $x\mathrm{A}y$ (in ihrer ganzen Ausdehnung) die Ebene der xy; und die beiden andern hierauf, und auf einander senkrechten Ebenen $z\mathrm{A}x$, $z\mathrm{A}y$, die Ebenen der xz und der yz. Ausser dieser älteren, noch jetzt gewöhnlichen Bezeichnung giebt es noch eine andere, von Gauss eingeführte, der die Coordinaten-Ebenen nach den darauf senkrechten Coordinaten benennt; nämlich die Ebene der $x\mathrm{A}y$ die Ebene der z, $x\mathrm{A}z$ die der y, und $y\mathrm{A}z$ die der x.

106.

Diese drei durch die Achsen gelegten Coordinaten-Ebenen $x\mathrm{A}y$, $z\mathrm{A}x$, $z\mathrm{A}y$ (von welchen man sich die erstere als horizontal, und die beiden andern als vertical denken kann), bilden um den Anfangspunct A acht sogenannte dreiflächige, körperliche rechte Winkel (von welchen die Zeichnung jedoch nur den einen $\mathrm{A}xyz$ versinnlichen kann). Es ist leicht einzusehen,

---

Durchschnittspunct A senkrecht auf beide Achsen, also auch senkrecht auf die Ebene des Papiers, eine Nadel, ZA, als dritte Achse, und denke sich deren Verlängerung durch die Ebene des Papiers als negative Seite derselben. In der Zeichnung lassen sich negative Werthe von x, y, z, so wie die negativen Seiten der Coordinaten-Achsen, ohne die Figur noch verwirrter zu machen, nicht gut bildlich darstellen. Uebrigens versteht es sich von selbst, dass von der wirklichen Zeichnung einer Fläche oder Linie im Raume nicht die Rede ist; man muss und kann sich dieselbe blos denken.

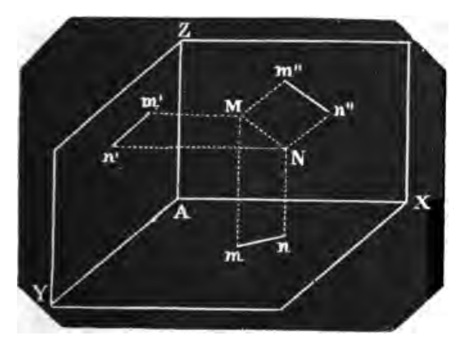
dass die Vorzeichen der Coordinaten eines Punctes, M (x, y, z), bestimmen, in welchem dieser acht (körperlichen) Winkel der Punct liegt. Er liegt nämlich für:

$+x+y+z$ im Winkel AXYZ
$+x+y-z$ „ „ AXY—Z
$+x-y+z$ „ „ AX—YZ
$+x-y-z$ „ „ AX—Y—Z
$-x+y+z$ „ „ A—XYZ
$-x+y-z$ „ „ A—XY—Z
$-x-y+z$ „ „ A—X—YZ
$-x-y-z$ „ „ A—X—Y—Z

so dass also durch die Grösse und Vorzeichen der Coordinaten eines Puncts, M (x, y, z), die Lage desselben gegen drei Achsen oder Ebenen vollkommen bestimmt ist.

107.

Wenn man von einem im Raume liegenden Punct, M, ein Perpendikel, Mm, auf eine Coordinaten-Ebene, xAy, fällt, so heisst der Fusspunct m dieses Perpendikels die Projection des Punctes M, und die Coordinaten-Ebene xAy, in welcher er liegt, die Projections-Ebene.



Sind die Projectionen eines Punctes, M, auf zwei Coordinaten-Ebenen, z. B. auf die der xy und zy, gegeben, und denkt man sich in diesen Puncten m, m' auf den Projections-Ebenen Perpendikel errichtet, so bestimmt umgekehrt der Durchschnittspunct dieser beiden Perpendikel die Lage des projectirten Puncts M wieder.

Man kann also auch sagen, dass die Lage eines Puncts im Raume durch zwei seiner Projectionen vollkommen bestimmt ist. Auf diesem einzigen, höchst einfachen Satze beruht, beiläufig bemerkt, die ganze Theorie der sogenannten zeichnenden oder beschreibenden Geometrie (Géométrie descriptive).

Denkt man sich ebenso von allen Puncten irgend einer im Raume liegenden Linie Perpendikel auf eine der Coordinaten-

Ebenen gefällt, so bilden die Fusspuncte dieser Perpendikel die Projection jener Linie, und man sieht leicht ein, dass auch umgekehrt, durch zwei solcher Projectionen, auf zwei (schicklichen) Coordinaten-Ebenen die Lage, Grösse und Form der projectirten Linie bestimmt ist.

Die Projection einer graden Linie ist wieder eine grade Linie und nur in dem Falle ein Punct, wenn sie auf der Projections-Ebene senkrecht steht.

Ist, beiläufig bemerkt, eine zu projectirende grade Linie mit der Projections-Ebene nicht parallel, so ist die Länge ihrer Projection gleich der Linie, multiplicirt mit dem Cosinus ihres Neigungswinkels gegen die Projections-Ebene. Dasselbe gilt auch von der Projection einer ebenen Fläche.

Die Projection einer krummen Linie ist nur in dem Falle eine grade Linie, wenn erstere in einer Ebene liegt, und diese zugleich senkrecht auf der Projections-Ebene steht.

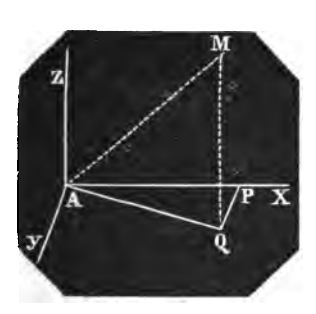
Die Projection einer krummen Linie, die nicht in einer Ebene liegt und deshalb eine Linie von doppelter Krümmung genannt wird, ist immer eine krumme Linie.

Zehntes Buch.

Bestimmung des Abstandes zweier Puncte im Raume durch ihre Coordinaten. Zusammenhang der drei Winkel, welche eine vom Anfangspunct aus gezogene Linie mit den Coordinaten-Achsen und Ebenen macht. Bestimmung des Winkels, welchen zwei aus dem Anfangspunct gehende Linien mit einander machen.

108.

Aufgabe. Es sind die Coordinaten eines Punctes, M (x, y, z), gegeben. Wie findet man die hiedurch bestimmte Entfernung AM$=d$ desselben vom Anfangspunct A?



Sei M der gegebene Punct (den wir uns vor der Bildfläche, zwischen den Coordinaten-Ebenen liegend, denken) und das von ihm auf die Ebene xy gefällte Perpendikel MQ$=z$, das vom Fusspunct Q auf die Achse der x gefällte Perpendikel QP$=y$ und AP$=x$.

Denkt man sich AQ und AM$=d$ gezogen, so ist in dem bei P rechtwinkligen Dreieck APQ, in welchem AQ die Hypotenuse ist:*)

*) Linien, welche ganz in einer der Coordinaten-Ebenen liegen, wie QP, AQ, wollen wir immer ganz auszeichnen, andere, welche vor oder zwischen den Coordinaten-Ebenen liegen, wie MQ, AM, sollen punctirt werden.

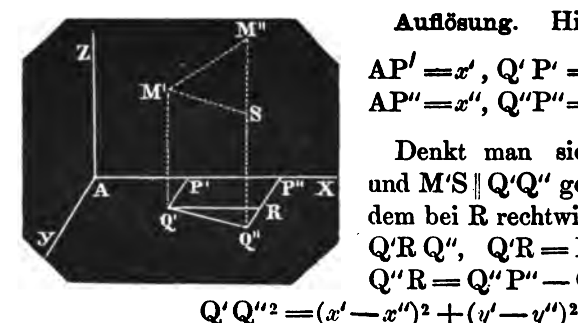
$$AQ^2 = AP^2 + QP^2$$
$$AQ^2 = x^2 + y^2$$

Da nun die Ordinate $MQ = z$ senkrecht auf der Ebene xAy ist, so ist sie auch senkrecht auf der Linie AQ, also das Dreieck AQM ein rechtwinkliges, und AM die Hypotenuse; daher:

$$AM^2 = AQ^2 + MQ^2$$
$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

109.

Aufgabe. Es sind die Coordinaten zweier Puncte gegeben, $M'(x' y' z')$, $M''(x'' y'' z'')$. Wie findet man hieraus ihren Abstand $M'M'' = d$?



Auflösung. Hier ist gegeben:

$AP' = x'$, $Q'P' = y'$, $M'Q' = z'$
$AP'' = x''$, $Q''P'' = y''$, $M''Q'' = z''$

Denkt man sich $Q'R \parallel P'P''$ und $M'S \parallel Q'Q''$ gezogen, so ist in dem bei R rechtwinkligen Dreieck $Q'RQ''$, $Q'R = P'P'' = x'' - x'$, $Q''R = Q''P'' - Q'P' = y'' - y'$,

$$Q'Q''^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2$$

Aus dem bei S rechtwinkligen Dreieck $M'SM''$, in welchem $M'S = Q'Q''$ und $M''S = M''Q'' - M'Q' = z'' - z'$, hat man:

$$M'M''^2 = M'S^2 + M''S^2$$
$$d^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2$$
$$d = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2}$$

Diese Formel ist, mit gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen, ganz allgemein (§ 10).

110.

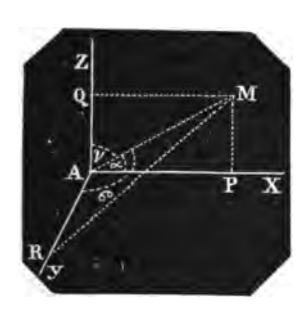
In Uebereinstimmung mit den Lehren der Mechanik, auf welche die analytische Geometrie häufig Anwendung findet, bestimmt man die Neigung einer vom Anfangspunct A ausgehenden Linie gegen die Achsen immer durch die Winkel, welche sie, in kürzester Drehung, mit den positiven Seiten derselben

macht, an welcher Seite sie auch liegen möge, so dass also nach dieser Festsetzung niemals Winkel über 180° vorkommen können.

111.

Aufgabe. Den analytischen Zusammenhang zu finden, welcher unter den Cosinus der drei Winkel α, β, γ Statt findet, die eine aus dem Anfangspunct gezogene Linie, AM, mit den Achsen AX, AY, AZ macht, so dass also:

$$MAX = \alpha, \quad MAY = \beta, \quad MAZ = \gamma$$



Auflösung. Nimmt man auf der Linie ein beliebiges Stück, AM $= d$, nennt x, y, z die Coordinaten des Punctes M, und fällt von diesem auf die drei Achsen (Schenkel der drei fraglichen Winkel) die Perpendikel MP, MR, MQ, so sind die von den Achsen abgeschnittenen Stücke offenbar den Coordinaten des Punctes M gleich, nämlich AP $= x$, AR $= y$, AQ $= z$, und es ist, mit gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen von x, y, z, immer:

$$\cos\alpha = \frac{x}{d}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{d}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{d}$$

Die Quadrate dieser cos. addirt und beachtet, dass $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ (§ 108), kommt:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

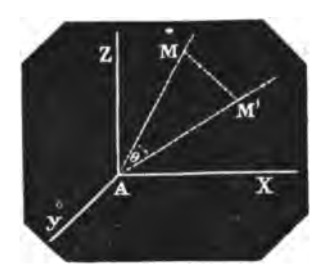
Vermöge dieser merkwürdigen und wichtigen Beziehung ist, wenn zwei Winkel, z. B. α, β, gegeben, der dritte γ nicht mehr ganz beliebig, jedoch auch nicht ganz bestimmt, indem er wegen des doppelten Vorzeichens von $\cos\gamma = \pm\sqrt{(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta)}$, um der Gleichung zu genügen, sowohl spitz als stumpf sein kann. Durch alle drei Winkel α, β, γ ist aber die Lage der Linie AM vollkommen bestimmt.

Anmerkung. Die Winkel α, β, γ sind augenscheinlich die

Ergänzungen derjenigen Winkel zu 90°, welche dieselbe Linie AM mit den Coordinaten-Ebenen der yz, xz, xy macht.

112.

Aufgabe. Es sind die Richtungen oder Lagen zweier vom Anfangspunct ausgehenden Linien, AM, AM', durch die Winkel α, β, γ und α', β', γ' gegeben, welche sie mit den drei Achsen machen. Wie findet man hieraus den Winkel θ, den die beiden Linien selbst mit einander machen?



Auflösung. Man nehme, der Einfachheit wegen, auf beiden Linien gleiche Stücke, $AM = AM' = d$, nenne x, y, z und x', y', z' die Coordinaten der Puncte M und M', und denke MM' gezogen, so ist nach §§ 108, 109:

$$AM^2 = x^2 + y^2 + z^2 = d^2$$
$$AM'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = d^2$$
$$MM'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

Nach einem bekannten Satze der Trigonometrie ist:

$$\cos\theta = \frac{AM^2 + AM'^2 - MM'^2}{2\,AM \cdot AM'}$$

$$\cos\theta = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 - [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]}{2 \cdot d^2}$$

$$\cos\theta = \frac{xx' + yy' + zz'}{d^2}$$

Nach § 111 ist $x = d \cdot \cos\alpha$, $x' = d \cdot \cos\alpha'$, $y = d \cdot \cos\beta$, $y' = d \cdot \cos\beta'$ etc. Daher:

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma' \quad \dots (1)$$

Sollen die beiden Linien AM, AM' senkrecht auf einander, also $\theta = 90°$ sein, so hat man unter den sechs Winkeln α, β, γ, α', β', γ' die Bestimmung:

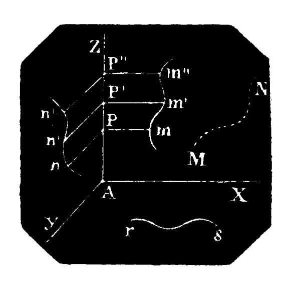
$$\cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma' = 0$$

*) Elftes Buch.

Gleichungen der graden Linie und dadurch bestimmte Lage derselben gegen die Coordinaten-Achsen und Ebenen. Aufgaben etc.

113.

Durch die Lage irgend einer gesetzmässig gebildeten Linie im Raume MN sind die Lagen ihrer Projectionen *rs*, *nn''*, *mm''* auf jeder der drei Coordinaten-Ebenen der *xy*, *xz*, *yz* vollkommen bestimmt (§ 107). Diese Projectionen sind also gleichfalls gesetzmässig gebildete Linien, und müssen sich deshalb (weil jede in einer Ebene liegt) analytisch durch Functionen zweier veränderlichen Grössen ausdrücken lassen, und zwar auf die Achsen der Ebene bezogen, in welcher sie liegen, nämlich die Projection *rs* durch eine Function zwischen x, y, die Projectionen *mm''*, *nn''* durch Functionen von x, z und y, z. Da nun aber umgekehrt diese drei Projectionen oder vielmehr schon zwei derselben, durch die Durchschnitte der in ihren Puncten auf den Projections-Ebenen senkrechten Linien, oder nach den Projections-Linien gekrümmten, senkrechten, sogenannten



Cylinderflächen, die projectirte Linie MN wieder bestimmen, so sieht man, wie durch diesen sinnreichen Einfall es möglich ist, die Lage und Gestalt irgend einer im Raume liegenden Linie, sie möge eine grade, eine ebene krumme, oder eine Linie von

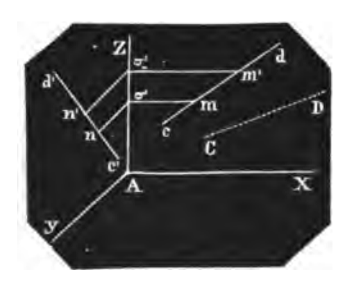
doppelter Krümmung sein, mittelst zweier auf einander senkrechten Projections-Ebenen festzuhalten, und zwar die analytische Geometrie, welche sich nicht um wirkliche Abbildungen der Begriffe kümmert, sondern nach deren Eigenschaften etc. forscht, mittelst zweier Projections-Gleichungen $x=\varphi(z)$ und $y=\psi(z)$, indem sie in der Regel die beiden (verticalen) Ebenen der xz und yz als Projections-Ebenen, die Achse ZZ als gemeinschaftliche Abscissen-Linie, XX, YY als Ordinaten-Achse nimmt, folglich in den beiden Projections-Gleichungen z die gemeinschaftlich unabhängig, x und y die abhängig veränderlichen Grössen sind. So dass z. B. für den Punct m der Linie mm'', zu der Ordinate $mp=x$, die Abscisse $Ap=z$ und für den Punct n der Linie nn'' zu derselben Abscisse $Ap=z$, die Ordinate $np=y$ gehört.

Die zeichnende Geometrie dagegen hat blos zum Zweck, das Bild oder den geometrischen Begriff von irgend einer unebenen Sache, z. B. Theile einer Maschine, so treu zu zeichnen, dass sie darnach in angegebenem Maasse genau gefertigt werden kann, und hiezu bestimmt sie gewöhnlich nur zwei Projectionen, auf zwei gegen einander senkrechten (horizontalen und verticalen) Ebenen. Mehres über diese, nur geringe Vorkenntniss der Elementar-Geometrie erfordernde Zeichnenkunst muss man in eigens darüber handelnden Lehrbüchern suchen.

114.

Da die Projectionen einer graden Linie, CD, wieder grade Linien, cd, $c'd'$, sind, so sind auch die beiden Gleichungen dieser Projectionen nothwendig von der Form: *)

$$\left.\begin{array}{l} x=az+b \ldots (1) \\ y=a'z+b' \ldots (2) \end{array}\right\}$$



wo a und a' die trigon. Tangenten der Winkel sind, unter welchen die Linien cd, $c'd'$ die gemeinschaftliche Achse der z (—ZZ) schneiden; $-\frac{b}{a}, -\frac{b'}{a'}$ sind die Entfernungen

*) Wenn nicht ein Anderes ausdrücklich erwähnt wird, so sollen die beiden Projections-Ebenen immer die der xz und yz sein, die man sich senkrecht gegen die Ebene der xy aufgebogen und CD davorliegend denken muss.

der Durchschnittspuncte vom Anfangspuncte A, b und b' die Stücke, welche sie von den Ordinaten-Achsen $-xx$ und $-yy$ abschneiden.

115.

Wären umgekehrt zwei Gleichungen dreier veränderlichen Grössen von der Form:

$$\left.\begin{aligned} x &= az + b \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ y &= a'z + b' \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{aligned}\right\}$$

gegeben, so kann man dieselben auch als die Projectionsgleichungen einer graden Linie im Raume betrachten, deren Lage gegen drei auf einander rechtwinklige Achsen, XX, YY, ZZ, durch die Coefficienten a, a', b, b' vollkommen bestimmt ist. Um dies deutlich einzusehen, denke man sich beide Gleichungen über die gemeinschaftliche Achse ZZ in den beiden Ebenen der xz und yz construirt, so erhält man zwei grade Linien, cd, $c'd'$. Denkt man sich nun in allen Puncten dieser Linien auf den Bildebenen, in welchen sie liegen, Perpendikel errichtet, so bilden diese wiederum zwei auf einander senkrechte Ebenen, deren Durchschnitt die erwähnte Linie im Raume ist, von welcher cd und $c'd'$ die Projectionen sind.

Je nach Beschaffenheit der Coefficienten a, a', b, b' sind hier folgende besondere Fälle möglich:

1. Gehen beide Projectionslinien cd, $c'd'$ durch den Anfangspunct A, so geht auch die dadurch im Raume bestimmte Linie CD durch den Anfangspunct, und umgekehrt. In diesem Falle sind in (1), (2) die Coefficienten b, b' zugleich Null. Die beiden Projections-Gleichungen einer Linie im Raume, welche durch den Anfangspunct geht, haben also die einfachere Form:

$$\begin{aligned} x &= a\,z \\ y &= a'z \end{aligned}$$

2. Ist in den beiden zusammengehörenden Gleichungen (1), (2) einer der Coefficienten a, a' Null, z. B. $a' = 0$, also die beiden Projections-Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= az + b \\ y &= 0 \cdot z + b' \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} x &= az + b \\ y &= b' \end{aligned}$$

so geht die projectirte Linie CD mit der Ebene der xz in einem Abstande $= b'$ parallel, und ihre Projection auf die Ebene der yz ist dann auf der Achse der y senkrecht, läuft also mit

der Achse ZZ in einem Abstande $=b'$ parallel. Wäre auch $b'=0$, so läge die projectirte Linie ganz in der Coordinaten-Ebene der xz (weil dann ihre Projection auf die Ebene der yz mit der Achse z zusammenfällt).

116.

Aufgabe. Die Projections-Gleichungen einer graden Linie zu finden, welche durch zwei gegebene Puncte, M' $(x'y'z')$, M'' $(x''y''z'')$ geht.

Auflösung. Nimmt man die beiden Ebenen der xz, yz zu Projections-Ebenen, so haben die beiden gesuchten Gleichungen jedenfalls die Form:

$$x=az+b \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$y=a'z+b' \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Da nun, wie man leicht sieht, die Coordinaten eines jeden Puncts der Linie im Raume den Coordinaten seiner Projectionen gleich sind, folglich in (1) und (2) für $z=z'$, auch $x=x'$ und $y=y'$ sein muss etc., so hat man zur Bestimmung der Coefficienten a, a', b, b', folgende vier Bedingungs-Gleichungen:

$$x'=az'+b \;\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$y'=a'z'+b' \;\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$
$$x''=az''+b \;\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$
$$y''=a'z''+b' \;\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Und hieraus könnte man durch gewöhnliche Elimination die Coefficienten a, a', b, b' berechnen, und ihre durch x', x'', y', y'', z', z'' ausgedrückten Werthe in (1) und (2) substituiren. Es ist aber bequemer, und die Resultate lassen sich dann in der Praxis besser handhaben, wenn wir wieder wie in § 12 verfahren.

Subtrahirt man (5) von (3), und (6) von (4), so hat man:

$$a=\frac{x'-x''}{z'-z''} \text{ und } a'=\frac{y'-y''}{z'-z''}$$

ferner (3) von (1), und (4) von (2) subtrahirt, kommt:

$$x-x'=a(z-z'),\; y-y'=a'(z-z')$$

setzt man hierin statt a und a' ihre gefundenen Werthe, so sind in bequemster Form:

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''}(z - z') \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$
$$y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''}(z - z') \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

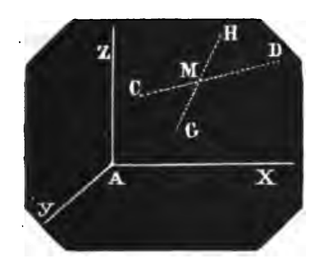
die gesuchten Projections-Gleichungen der durch M′ ($x'\,y'\,z'$) M″ ($x''\;y''\;z''$) gehenden graden Linie.

117.

Aufgabe. Es sind die zwei Paar Projections-Gleichungen zweier graden Linien, CD, GH, gegeben, nämlich:

$$x = az + b \ldots (1) \qquad x = \alpha z + \mathfrak{b} \ldots (3)$$
$$y = a'z + b' \ldots (2) \qquad y = \alpha' z + \mathfrak{b}' \ldots (4)$$

wie findet man die durch die Coefficienten $a, a', \alpha, \alpha', b \ldots$ bestimmten Coordinaten x, y, z ihres (etwaigen) Durchschnittspuncts M?



Auflösung. Für den Durchschnittspunct M haben beide Linien, CD, GH, einerlei Coordinaten (welche gleich den Coordinaten des Durchschnittspuncts der Projectionslinien sein müssen). Es muss daher für z ein solcher Werth $z_{\prime}$ (gemeinschaftliche Abscisse) gefunden werden, welcher in beide Paar Projections-Gleichungen substituirt, einerlei x und einerlei y giebt. Es muss also sein:

$$az_{\prime} + b = \alpha z_{\prime} + \mathfrak{b} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$
und auch $$a'z_{\prime} + b' = \alpha' z_{\prime} + \mathfrak{b}' \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Aus (5) folgt: $z_{\prime} = \dfrac{\mathfrak{b} - b}{a - \alpha}$

Aus (6) folgt: $z_{\prime} = \dfrac{\mathfrak{b}' - b'}{a' - \alpha'}$

Da nun hier die gemeinschaftliche Coordinate $z_{\prime}$ des Durchschnittspuncts durch zwei verschiedene Ausdrücke bestimmt wird, und doch nur einen Werth haben kann, so müssen, wenn ein Durchschnittspunct möglich sein soll, die Coefficienten $a, a', \alpha \ldots$ nothwendig so beschaffen sein, dass die beiden Ausdrücke für $z_{\prime}$ einerlei Werth geben, daher:

$$\frac{\beta - b}{a - \alpha} = \frac{\beta' - b'}{a' - \alpha'} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

sein. Findet diese Bedingung Statt, so schneiden sich die beiden Linien CD, GH wirklich, und man findet die beiden andern Coordinaten x, y, indem man einen der beiden, für z, erhaltenen Ausdrücke in (1) und (2) oder in (3) und (4) substituirt.

Findet aber diese Bedingung (7) nicht Statt, so können sich die Linien CD, GH auch nicht schneiden. Sie liegen dann entweder in verschiedenen Ebenen und laufen über einander weg, oder sie sind parallel; letzteres nämlich, wenn zugleich $a = \alpha$ und $a' = \alpha'$; denn in diesem Falle sind offenbar die Projectionen beider Linien, also auch diese selbst parallel.

118.

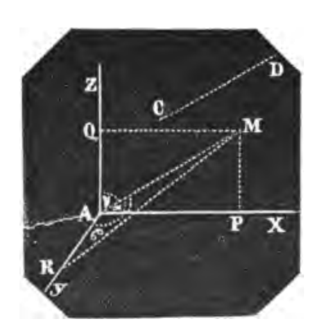
Wenn zwei grade Linien nicht in einer Ebene liegen, sich also auch nicht schneiden, so spricht man dennoch von einer Neigung (Lage derselben gegen einander), und bestimmt diese durch den Winkel, der entsteht, indem man aus einem beliebigen Punct der einen Linie eine Parallele mit der andern zieht.

119.

Aufgabe. Es sind die Projections-Gleichungen einer graden Linie CD gegeben:

$$x = az + b \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$y = a'z + b' \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Wie findet man hieraus die durch die Coefficienten a, a' bestimmten Winkel α, β, γ, welche sie mit den Achsen xx, yy, zz macht?



Auflösung. Denkt man sich durch den Anfangspunct eine mit CD Parallele, AM, gezogen, so macht diese noch dieselben Winkel α, β, γ mit den Achsen (§ 118), und ihre einfacheren Projections-Gleichungen, die wir statt der gegebenen setzen können, sind (§ 115, 1):

$$x = az$$
$$y = a'z$$

Setzt man nun $AM = d$, fällt von M auf die Achsen die Perpendikel MP, MR, MQ, so sind die auf den Achsen abgeschnittenen Stücke AP, AR, AQ gleich den Coordinaten des Punctes M (und gleich den seiner Projectionen auf die Ebenen der xz, yz). Nennt man diese Coordinaten x, y, z, so ist $AQ = z$, $AP = x = az$, $AR = y = a'z$ und:

$$\cos\gamma = \frac{z}{d}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{d} = \frac{a'z}{d}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{d} = \frac{az}{d}$$

Weil nun (§ 108): $d^2 = z^2 + x^2 + y^2$

oder: $d^2 = z^2 + a^2z^2 + a'^2z^2$

so ist: $d = z\sqrt{1 + a^2 + a'^2}$

Mithin ist auch:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + a'^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{a'}{\sqrt{1 + a^2 + a'^2}}$$

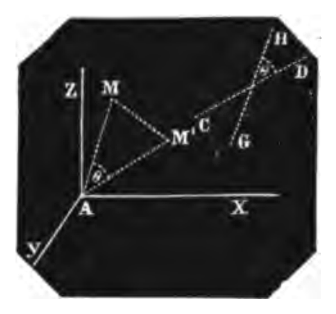
$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + a'^2}}$$

Diese durch a, a' bestimmten Winkel α, β, γ sind zugleich die Ergänzungen derjenigen zu 90°, welche die Linie mit den Coordinaten-Ebenen der yz, xz, xy macht.

Anmerkung. Mit welchem Vorzeichen hier der Nenner genommen werden muss, d. h. ob die Winkel α, β, γ spitz oder stumpf sind, ergiebt sich aus der Lage der Linie CD, welche durch die Vorzeichen der Coefficienten a, a', ihrer Projections-Gleichungen (1) und (2) bestimmt ist.

120.

Aufgabe. Es sind die Gleichungen zweier graden Linien, CD, GH, gegeben, wie findet man hieraus den Winkel θ, den sie mit einander machen, sie mögen in einer Ebene liegen oder nicht?



Auflösung. Seien die beiden Paar gegebenen Projections-Gleichungen:

$$x = az + b \qquad x = \alpha z + \mathfrak{b}$$
$$y = a'z + b' \qquad y = \alpha' z + \mathfrak{b}'$$

Denkt man sich mit den beiden hiedurch bestimmten Linien CD, GH zwei Parallelen, AM, AM', aus dem Anfangspunct gezogen, so machen diese noch denselben Winkel θ mit einander, und ihre einfachern Gleichungen sind:

$$x = az \qquad x = \alpha z$$
$$y = a'z \qquad y = \alpha' z$$

Nennt man x, y, z die Coordinaten des Punctes M und x', y', z' die des Punctes M', so ist:

$$AM^2 = z^2 + y^2 + x^2$$
$$AM'^2 = z'^2 + y'^2 + x'^2$$
$$MM'^2 = (z - z')^2 + (y - y')^2 + (x - x')^2$$
$$\cos\theta = \frac{AM^2 + AM'^2 - MM'^2}{2 AM \cdot AM'}$$

und wenn man hierin die vorhergehenden Ausdrücke substituirt:

$$\cos\theta = \frac{zz' + yy' + xx'}{\sqrt{z^2 + y^2 + x^2} \cdot \sqrt{z'^2 + y'^2 + x'^2}}$$

Vermöge der Projections-Gleichungen ist aber:

$$x^2 = a^2 z^2, \quad x'^2 = \alpha^2 z'^2, \quad xx' = a\alpha zz'$$
$$y^2 = a'^2 z^2, \quad y'^2 = \alpha'^2 z'^2, \quad yy' = a'\alpha' zz'$$

Dieses noch substituirt, kommt:

$$\cos\theta = \frac{1 + a\alpha + a'\alpha'}{\sqrt{1 + a^2 + a'^2} \cdot \sqrt{1 + \alpha^2 + \alpha'^2}} \ldots\ldots (1)$$

Aus dieser Formel könnte man die ganze sphärische Trigonometrie entwickeln. Hinsichtlich des Vorzeichens für $\cos\theta$, vergl. Anm. § 119.

Sollen die beiden Linien CD, GH gegen einander senkrecht, also $\theta = 90^0$ sein, so muss unter den Coefficienten a, a', α, α' die Bedingung Statt finden:

$$1 + a\alpha + a'\alpha' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

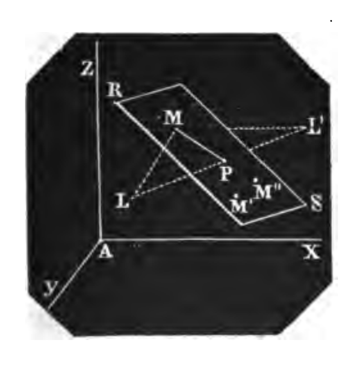
*) Zwölftes Buch.

Gleichung der Ebene und von der dadurch bestimmten Lage derselben gegen die Coordinaten-Achsen und Ebenen, so wie auch gegen andere bestimmte Linien und Ebenen.

121.

Da die Ebenen zu den Flächen gehören, so ist vorauszusehen, dass ihre allgemeine, auf drei rechtwinklige Coordinaten-Achsen bezogene Gleichung nothwendig drei veränderliche Grössen enthalten muss (§ 103). Um den Grad und die Form dieser allgemeinen Gleichung näher kennen zu lernen, müssen wir sie aus irgend einem allgemeinen Merkmal der Ebenen abzuleiten suchen.

Unter den bekannten Merkmalen, worauf wir unsere Rechnung am bequemsten gründen können, dürfte folgendes das schicklichste sein:



Sei RS ein Theil einer nach allen Seiten unbegrenzt gedachten Ebene, darauf ein Perpendikel, LP, errichtet, und dasselbe durch die Ebene hindurch um ein gleiches Stück verlängert, L'P = LP.

Seien a, b, c und a', b', c' die Coordinaten der Endpuncte, L, L' Diese Coordinaten, durch welche die Lage der auf der Mitte von LL' senkrechten Ebene jedenfalls bestimmt sein würde, können wir hier vorläufig als gegebene Grössen betrachten.

Jeder beliebige Punct, M, M' ... der Ebene befindet sich nun bekanntlich in gleichem Abstande von den Endpuncten L, L', nämlich ML = ML', M'L = M'L' ...

Seien nun x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Puncts, M, der Ebene, so ist erstlich (§ 109):

$$\begin{aligned} ML^2 &= (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \\ ML'^2 &= (x-a')^2 + (y-b')^2 + (z-c')^2 \end{aligned}$$

und folglich, weil $ML = ML'$:

$$(x-a')^2 + (y-b')^2 + (z-c')^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

$$(a-a')x + (b-b')y + (c-c')z = \frac{a^2+b^2+c^2-(a'^2+b'^2+c'^2)}{2}$$

oder, indem wir einfachere Coefficienten substituiren:

$$Ax + By + Cz = D \dots\dots\dots\dots (1)$$

Und dies ist die allgemeine Form der Gleichung einer durch A, B, C, D der Lage nach bestimmten Ebene. Die Gleichung ist also vom ersten Grade.

Werden zwei Coordinaten, x, y, ganz beliebig angenommen, so ist die dritte Ordinate, z, vollkommen bestimmt, und da alle Werthe von x, y, z, welche der Gleichung (1) Genüge leisten, auch die vorhergehenden, aus welchen man sich die Gleichung (1) entsprungen denken kann, befriedigen, so liegen nothwendig alle durch die Gleichung (1) bestimmten Puncte in einer Ebene. Dividirt man durch D, so erhält die Gleichung $\left(\frac{A}{D} = M,\ \frac{B}{D} = N,\ \frac{C}{D} = P \text{ gesetzt}\right)$ die merkwürdige Form:

$$Mx + Ny + Pz = 1 \dots\dots\dots\dots (2)$$

Reducirt man (1) auf die abhängig veränderliche z, und setzt $-\frac{A}{C} = a$, $-\frac{B}{C} = b$, $\frac{D}{C} = c$, so kommt:

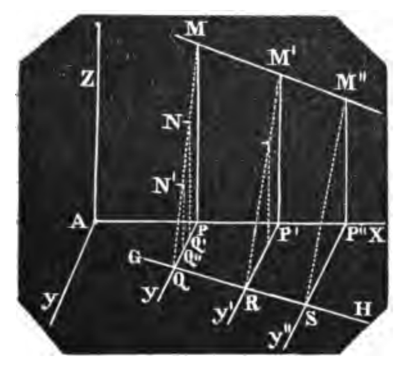
$$z = ax + by + c \dots\dots\dots\dots (3)$$

122.

Umgekehrt kann man aber auch, unabhängig von dem vorhergehenden Paragraphen, zeigen, dass eine Gleichung ersten Grades dreier veränderlichen Grössen, die sich immer auf die Form:

$$z = ax + by + c \dots\dots\dots\dots (1)$$

bringen lässt, wenn sie construirt wird, eine durch a, b, c der Lage nach bestimmte Ebene giebt.



Man denke sich für x einen bestimmten Werth, $x' = AP$, und dann für y alle möglichen Werthe, $y = 0$, $= PQ'$, $= PQ''$ ...., gesetzt, und die entsprechenden Ordinaten $z = PM$, $Q'N$... (welche, weil sie einerlei Abscisse, $AP = x'$, haben, offenbar in einer auf der Ebene der xy und der xz senkrechten und mit yAz parallelen Ebene QPM liegen) nach der Gleichung:

$$z = ax' + by + c \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

berechnet, so liegen ihre Endpuncte M, N, N'... in einer graden Linie, QM, deren Gleichung (indem man in (2) die für alle y gleichbleibende Summe $ax' + c = d$ setzt):

$$z = by + d \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

und worin also b die trigonometrische Tangente des Winkels MQP ist, unter welchem QM die hier als Abscissen-Achse zu betrachtende, auf Ax senkrechte Linie Py schneidet, und zwar in einer Entfernung $= -\frac{d}{b} = PQ$ vom Anfangspunct P, denn für $y = -\frac{d}{b} = PQ$ ist $z = 0$.

Nimmt man in (1) für x einen anderen bestimmten Werth, $x'' = AP'$, und dazu wieder alle möglichen Werthe von y, so erhält man eine andere grade Linie, M'R, deren Gleichung:

$$z = by + (ax'' + c) \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

und worin wieder b die trigonometrische Tangente des Winkels M'RP', den diese Linie M'R mit der Achse $P'y'$ macht, und sie in der Entfernung $P'R = -\frac{(ax'' + c)}{b}$ schneidet, denn für diesen Werth von y ist wieder $z = 0$.

Denkt man sich nun so weiter für jeden möglichen Werth von x immer alle möglichen Werthe von y gesetzt, so erhält man eine Reihe unmittelbar auf einander folgender graden Linien,

MQ... M'R... M''S..., welche aus folgenden Gründen in einer Ebene liegen.

Erstlich sind diese Linien parallel, weil sie in mit yAz parallelen Ebenen liegen, und mit den Parallelen Py, $P'y$... oder, was dasselbe ist, mit der Ebene der xy gleiche Winkel machen, MQP=M'R'P'...

Zweitens liegen ihre Durchschnittspuncte Q, R, S... in der Ebene der xy in einer graden Linie, GH, weil ihre Entfernungen PQ, P'R... von der Achse AX alle aus dem Ausdruck:

$$y = -\frac{(ax + c)}{b}$$

hervorgehen, indem für jeden solchen Werth von y, was auch x sein möge, $z=0$ wird. Dies ist demnach die Gleichung der Linie GH.

Man kann sich also die aus der Gleichung (1) hervorgehende fragliche Fläche durch eine grade Linie, MQ, von unbestimmter Länge beschrieben denken, welche in stets gleicher Neigung gegen die Ebene der xy, parallel mit sich selbst, an eine grade Linie, GH, hingleitet, und folglich eine Ebene beschreibt.*)

123.

Zur vollständigen Erklärung der allgemeinen Gleichung:

$$z = ax + by + c \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

von welcher wir jetzt wissen, dass sie die einer Ebene ist, müssen wir noch die Bedeutung der Coefficienten a, b, c suchen Diese findet man durch Bestimmung der Durchschnittspuncte und Durchschnittslinien der aus der Gleichung (1) entspringenden Ebene mit den Coordinaten-Achsen und Ebenen.

1. Die Gleichung (1) giebt für $x=0$ und $y=0$ die Ordinate $z=c$. Dieser Coefficient c giebt das Stück, um welches man vom Anfangspunct in der Achse Az auf- oder absteigen muss (je nachdem c positiv oder negativ ist), um an die Ebene zu kommen; c ist also das Stück der Achse Az, welches die Ebene von derselben abschneidet.

---

*) Man muss den beständigen Winkel MQP, den die an GH fortgleitende Linie mit der Ebene der xy macht, nicht mit dem Winkel verwechseln, den die beschriebene Ebene selbst mit derselben Ebene xy macht.

2. Um die Lage der Linie zu finden, in welcher unsere Ebene die Ebene der xz schneidet, bedenke man, dass für alle Puncte derselben die Ordinate $y=0$ ist. Setzen wir daher in (1) für x alle möglichen Werthe und immer $y=0$, so wird:

$$z=ax+c \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Dies ist also die Gleichung der Durchschnittslinie in der Ebene der xz; sie schneidet die Achse der x unter einem Winkel, dessen Tangente $=a$, und in einem Abstande vom Anfangspunct $=-\frac{c}{a}$.

3. Für alle Puncte, welche unsere Ebene mit der Ebene der yz gemein hat, ist die Abscisse $x=0$. Nehmen wir also in (1) zu $x=0$ für y alle möglichen Werthe, so giebt die Gleichung:

$$z=by+c \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

alle diese Puncte, also eine grade Linie, welche die Achse der y unter einem Winkel, dessen Tangente $=b$, und in einer Entfernung vom Anfangspunct $=-\frac{c}{b}$ schneidet.

4. Für alle Puncte der Linie, in welcher unsere Ebene die Ebene der xy schneidet, ist immer $z=0$; daher:

$$ax+by+c=0$$

oder: $$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

die Gleichung dieser Durchschnittslinie, welche mit der Achse der x einen Winkel macht, dessen Tangente $=-\frac{a}{b}$ ist, und sie in einem Abstande $=-\frac{c}{a}$ vom Anfangspunct schneidet.

Durch zwei dieser Durchschnittslinien ist nun die Lage der Ebene (1) vollkommen bestimmt.

*) Folgende besondere Fälle sind hier indessen noch zu merken:

5. Ist in (1) der Coefficient $c=0$, so ist:

$$z=ax+by \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

die Gleichung einer durch den Anfangspunct gehenden Ebene, weil für $x=0$, und $y=0$ auch $z=0$.

6. Ist in (1) $b=0$, so ist:

$$z = ax + 0 \cdot y + c$$
$$\text{oder: } z = ax + c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

die Gleichung einer auf der xz senkrechten Ebene, und zugleich auch die Gleichung der Durchschnittslinie. Ebenso ist:

$$z = 0 \cdot x + by + c$$
$$z = by + c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

die Gleichung einer Ebene, welche auf der der yz senkrecht ist, und so auch:

$$ax + by + c = 0$$
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

die Gleichung einer Ebene, welche in dieser Durchschnittslinie auf der Ebene der xy senkrecht steht.

7. Sind a und b zugleich Null, so ist:

$$z = 0 \cdot x + 0 \cdot y + c$$
$$z = c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

die Gleichung einer Ebene, welche mit der Ebene der xy in einem Abstande $= c$ parallel geht. Wäre auch $c = 0$, so wäre:

$$z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

die Gleichungen der Ebene der xy selbst. Aus denselben Gründen sind:

$$y = c$$
$$x = c$$

die Gleichungen der Ebenen, welche mit den Coordinaten-Ebenen der xz und yz parallel gehen.

124.

Aufgabe. Die Gleichung einer Ebene zu finden, welche durch drei gegebene Puncte, $M'(x'y'z')$, $M''(x''y''z'')$, $M'''(x'''y'''z''')$ geht.

Auflösung. Die Gleichung hat jedenfalls die Form:

$$z = ax + by + c \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Zur Bestimmung der Coefficienten a, b, c hat man die drei Bedingungs-Gleichungen:

$$z' = ax' + by' + c \dots\dots\dots\dots (2)$$
$$z'' = ax'' + by'' + c \dots\dots\dots\dots (3)$$
$$z''' = ax''' + by''' + c \dots\dots\dots\dots (4)$$

125.

Aufgabe. Es sind die Gleichungen zweier (sich schneidender) Ebenen gegeben, nämlich:

$$z = Ax + By + C \dots\dots\dots\dots (1)$$
$$z = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C} \dots\dots\dots\dots (2)$$

Man suche die Projections-Gleichungen der Durchschnittslinie.

Auflösung. Für die gemeinschaftliche Durchschnittslinie haben beide Ebenen gemeinschaftliche Coordinaten. Um also die Projection dieser Linie auf die Ebene der xy zu erhalten, suchen wir die zusammengehörenden Werthe von x und y, welche, in beide Gleichungen (1) und (2) substituirt, gleiche z geben. Dies ist der Fall, wenn wir zu einem beliebigen x die Ordinate y so nehmen, dass immer:

$$Ax + By + C = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}$$
$$\text{oder: } y = \frac{\mathfrak{A} - A}{B - \mathfrak{B}} x + \frac{\mathfrak{C} - C}{B - \mathfrak{B}} \dots\dots\dots (1)$$

Um die Gleichung der Projection der Durchschnittslinie auf eine zweite Coordinaten-Ebene, z. B. auf die der xz, zu erhalten, suchen wir die Beziehung zwischen den Werthen von x und z, welche, in (1) und (2) gesetzt, gleiche y geben, daher die zweite Projections-Gleichung:

$$\frac{z - \mathfrak{A}x - \mathfrak{C}}{\mathfrak{B}} = \frac{z - Ax - C}{B}$$
$$\text{oder: } z = \frac{B\mathfrak{A} - A\mathfrak{B}}{B - \mathfrak{B}} \cdot x + \frac{B\mathfrak{C} - \mathfrak{B}C}{B - \mathfrak{B}} \dots\dots (4)$$

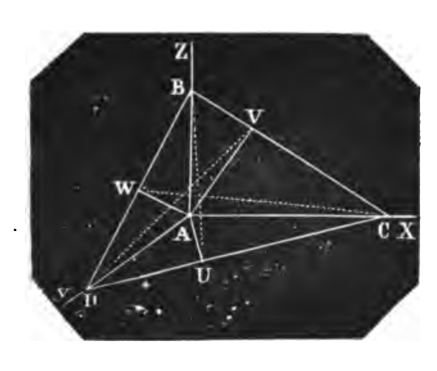
Anmerkung. Es ist für sich klar, dass, wenn zwei Ebenen parallel sein sollen, es auch ihre Durchschnittslinien mit den Coordinaten-Ebenen sein und deshalb die Coefficienten von x und y in den Gleichungen beider Ebenen gleich sein müssen. $A = \mathfrak{A}$, $B = \mathfrak{B}$.

126.

Aufgabe. Es ist die Gleichung einer Ebene gegeben:

$$z + Ax + By - C = 0$$

wie findet man die hiedurch bestimmten Winkel, welche sie mit den Coordinaten-Ebenen macht?



Auflösung. Seien BC, CD, BD ihre Durchschnittslinien mit den Coordinaten-Ebenen. Fällt man auf diese vom Anfangspunct die Perpendikel AU, AV, AW, und denkt sich die Linien BU, CW, DV gezogen, welche in der fraglichen Ebene liegen, so sind offenbar AUB=U, AVD=V, AWC =W die gesuchten Winkel, welche sie mit den Coordinaten-Ebenen der *xy*, *xz*, *yz* macht.

Nun ist:

$$\text{tg}\, U = \frac{AB}{AU} = \frac{AB}{AC \cdot \sin ACD}$$

Nach § 123. 1, 2 ist aber:

$$AB = C$$

$$AC = +\frac{C}{A}$$

$$\text{tg}\, ACD = +\frac{A}{B}$$

$$\text{folglich: } \sin ACD = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

also auch, wenn man diese Werthe substituirt:

$$\text{tg}\, U = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Sucht man auf gleiche Weise die Tangenten der beiden übrigen Winkel V, W und drückt dann alle drei, ihres leichtern Gebrauchs wegen, durch ihre Cosinus aus, so findet man:

$$\cos U = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}$$

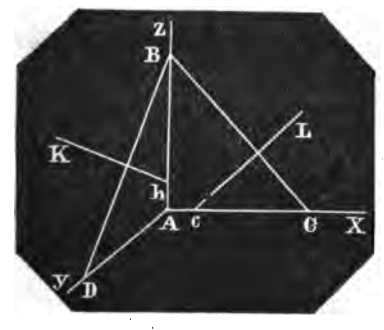
$$\cos V = \frac{B}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}$$

$$\cos W = \frac{A}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}$$

$$\cos^2 U + \cos^2 V + \cos^2 W = 1$$

127.

Aufgabe. Die Beziehung zu finden, welche unter den Coefficienten der Gleichung einer Ebene und der Projections-Gleichungen einer graden Linie Statt finden muss, damit beide auf einander senkrecht sind.



Auflösung. Es seien die Gleichungen der Ebene und des Perpendikels:

$$z = Ax + By + C \ldots (1)$$
$$\left.\begin{array}{l} x = az + b \ldots\ldots (2) \\ y = a'z + b' \ldots\ldots (3) \end{array}\right\}$$

so sind die Gleichungen der beiden Durchschnittslinien BC, BD der Ebene mit den Coordinaten-Ebenen (§ 123, 2, 3).

$$z = Ax + C$$
$$z = By + C$$

oder auf x und y reducirt:

$$x = \frac{1}{A} \cdot z - \frac{C}{A} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$y = \frac{1}{B} \cdot z - \frac{C}{B} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Sind nun cL, hK die durch (2) und (3) bestimmten Projectionen des Perpendikels, so müssen diese offenbar senkrecht auf den Durchschnittslinien BC, BD sein. Man denke sich, um dies einzusehen, durch das Perpendikel zwei auf die der xz und yz senkrechte Ebenen gelegt, so sind diese (des Perpendikels wegen) auch auf der fraglichen Ebene senkrecht, und folglich ihre Durchschnittslinien mit den Coordinaten-Ebenen, nämlich cL und hK, nothwendig auf BC und BD senkrecht. Damit nun aber die beiden Linien (2) und (4) auf einander senkrecht seien, muss, zufolge § 17, nothwendig der Coefficient von z in der einen das Umgekehrte und Entgegengesetzte von z in der anderen, also $a = -A$, und aus demselben Grunde $a' = -B$ sein, die anderen Coefficienten C, b, b' kommen hiebei, wie vorauszusehen war, nicht in Betracht.

128.

Aufgabe. Es ist die Gleichung einer Ebene gegeben:

$$z = Ax + By + C \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Man sucht die Projections-Gleichungen einer darauf senkrechten Linie, welche durch einen beliebig gegebenen Punct, M′ (x' y' z'), geht.

Auflösung. Die Projections-Gleichungen der senkrechten Linie haben die Form (§ 127):

$$x = -Az + m \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$y = -Bz + n \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Zur Bestimmung der beiden andern Coefficienten hat man die Bedingungsgleichungen:

$$x' = -Az' + m, \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$
$$y' = -Bz' + n \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Daher sind die verlangten Gleichungen:

$$x - x' + A(z - z') = 0$$
$$y - y' + B(z - z') = 0$$

129.

Aufgabe. Es sind die Projections-Gleichungen einer graden Linie gegeben.

$$x = az + m$$
$$y = bz + n$$

Man suche die Gleichung einer hierauf senkrechten und zugleich durch einen gegebenen Punct, M′ (x' y' z'), gehenden Ebene.

Auflösung. Die Gleichung einer auf der gegebenen Linie senkrechten Ebene ist (§ 127):

$$z = -ax - by + c$$

Damit sie aber durch den Punct M′ (x' y' z') geht, hat man zur Bestimmung von c die Bedingungs-Gleichung:

$$z' = -ax' - by' + c$$

Daher die verlangte Gleichung:

$$z - z' + a(x - x') + b(y - y') = 0$$

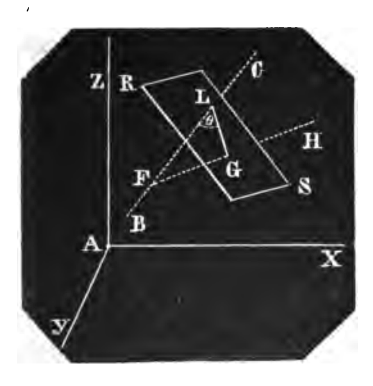
130.

Aufgabe. Es sind die Projections-Gleichungen einer graden Linie, BC, und die Gleichung einer Ebene, RS, gegeben:

$$z = Ax + By + C \dots\dots\dots\dots (1)$$
$$\left.\begin{array}{l} x = az + m \dots\dots\dots\dots (2) \\ y = bz + n \dots\dots\dots\dots (3) \end{array}\right\}$$

Wie findet man hieraus den Winkel θ, den sie mit einander machen?

Auflösung. Man fälle von einem beliebigen Punct, F, der Linie BC ein Perpendikel, FG, auf die Ebene RS, so sind die Projections-Gleichungen dieses Perpendikels:



$$x = -Az + m' \dots (4)$$
$$y = -Bz + n' \dots (5)$$

Denkt man sich den Durchschnittspunct L mit G verbunden, so ist FGL ein rechtwinkliges Dreieck, und es ist der Cosinus des Winkels F, den die beiden Linien BC, FH mit einander machen, gleich dem Sinus des gesuchten Winkels θ, folglich (§ 120):

$$\sin\theta = \frac{1 - Aa - Bb}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + A^2 + B^2)}} \dots\dots (6)$$

Soll die Linie BC mit der Ebene RS parallel, also $\sin\theta = 0$ sein, so findet unter den Coefficienten der Gleichungen der Linie und der Ebene (1), (2), (3) folgende Bedingung statt:

$$Aa + Bb = 1 \dots\dots\dots\dots (7)$$

131.

Aufgabe. Die Bedingungen zu finden, welche unter den Coefficienten der Gleichung einer Ebene und den Projections-Gleichungen einer graden Lini Statt haben, damit die Linie in der Ebene liegt.

Auflösung. Die Gleichungen haben die Form:

$$z = Ax + By + C \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\left.\begin{array}{l} x = az + m \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ y = bz + n \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{array}\right\}$$

Nimmt man in der Linie zwei beliebige Puncte, deren Coordinaten $x'y'z'$ und $x''y''z''$ heissen mögen, und wo demnach:

$$x' = az' + m, \qquad x'' = az'' + m$$
$$y' = bz' + n, \qquad y'' = bz'' + n$$

so müssen, damit diese beiden Puncte zugleich auch in der Ebene liegen, diese Werthe von $x'y'$, $x''y''$ in (1) substituirt, $z = z'$ und $z = z''$ geben, daher die Bedingung:

$$z' = A(az' + m) + B(bz' + n) + C$$
$$z'' = A(az'' + m) + B(bz'' + n) + C$$

oder so geschrieben:

$$(Aa + Bb - 1)z' + (Am + Bn + C) = 0 \ldots (4)$$
$$(Aa + Bb - 1)z'' + (Am + Bn + C) = 0 \ldots (5)$$

Da nun die linke Seite in jeder dieser beiden Gleichungen, welche Werthe von z' und z'' man auch annehmen mag, gleich Null sein muss, so folgt hieraus, dass dies nicht anders möglich ist, als wenn der Coefficient von z', und folglich auch das andere beständige Glied, jedes für sich $= 0$ ist. Damit also die Linie in der Ebene liege, ist erforderlich, dass:

$$\left.\begin{array}{l} Aa + Bb - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (6) \\ Am + Bn + C = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (7) \end{array}\right\}$$

132.

Aufgabe. Es sind die Gleichungen zweier Ebenen gegeben:

$$z = Ax + By + C, \qquad z = A'x + B'y + C'$$

Wie findet man den hiedurch bestimmten Winkel θ, den sie mit einander machen?

Auflösung. Man denke sich vom Anfangspunct auf beide Ebenen Perpendikel gefällt, so bilden diese, wie leicht einzusehen, denselben Winkel θ mit einander. Nach § 127 sind die Projections-Gleichungen dieser Perpendikel:

$$\left.\begin{array}{l} x = -Az \\ y = -Bz \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = -A'z \\ y = -B'z \end{array}\right\}$$

und daher ist (§ 120) für den fraglichen Winkel θ:

$$\cos\theta = \frac{1 + AA' + BB'}{\sqrt{(1+A^2+B^2)(1+A'^2+B'^2)}} \ldots\ldots (1)$$

Besondere Fälle:

1. Sollen beide Ebenen parallel, also $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$ sein, so folgt die bereits aus § 125 bekannte Bedingung:

$$A = A',\ B = B'$$

2. Sollen die beiden Ebenen auf einander senkrecht sein, so ist $\cos\theta = 0$. Für diesen Fall ist also die Bedingung:

$$1 + AA' + BB' = 0$$

133.

Aufgabe. Den Zusammenhang des Winkels θ zweier durch ihre Gleichungen bestimmten Ebenen mit den sechs Winkeln U, V, W und U', V', W', die sie mit den Coordinaten-Ebenen xy, xz, yz machen, zu finden.

Auflösung. Seien die beiden Ebenen:

$$z = Ax + By + C \qquad z = A'x + B'y + C'$$

Drückt man die sechs Winkel zuerst durch ihre Cosinus aus (§ 126), multiplicirt die gleichnamigen mit einander und addirt die Producte, so ist zufolge des vorhergehenden §:

$$\cos\theta = \cos U \cdot \cos U' + \cos V \cdot \cos V' + \cos W \cdot \cos W'$$

und für $\theta = 90^0$:

$$\cos U \cdot \cos U' + \cos V \cdot \cos V' + \cos W \cdot \cos W' = 0$$



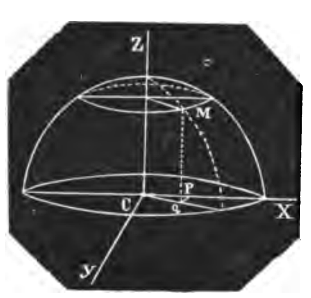
*) Dreizehntes Buch.

Einige der wichtigsten Flächen vom zweiten Grade.

I. Umdrehungsflächen.

134.

Aufgabe. Die Gleichung der Kugelfläche zu finden.



Auflösung. Die Gleichung für die Kugelfläche findet man am leichtesten aus dem Merkmale: dass alle ihre Puncte gleich weit vom Mittelpunct entfernt sind.

Nehmen wir diesen Mittelpunct C zum Anfangspunct rechtwinkliger Coordinaten, setzen den Radius der Kugel $= r$ und fällen von einem beliebigen Punct, M, der Oberfläche auf die Ebene der xy das Perpendikel MQ$=z$, von Q auf die Achse der x das Perpendikel QP$=y$, so ist CP$=x$, und man hat also, die Coordinaten mögen positiv oder negativ sein (§ 108), und wegen CM$=r$, immer:

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$
$$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

setzt man hierin für x, y alle möglichen Werthe (für welche x^2+y^2 nie grösser als r^2, also z nicht imaginär wird), so

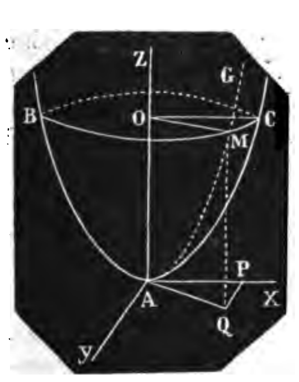
giebt diese Gleichung (wegen des doppelten Vorzeichens ± der Wurzel) alle Puncte der Kugeloberfläche.

135.

Wenn eine Linie sich um eine feste Achse dreht, so dass jede von ihr auf die Achse gefällte Ordinate einen Kreis beschreibt, so beschreibt die sich um die Achse drehende Linie selbst eine krumme Fläche. Es ist leicht, nach einer allgemeinen Regel die Gleichungen solcherweise entstandener sogenannter Umdrehungsflächen aus den Gleichungen der sie beschreibenden Linien abzuleiten.

136.

Aufgabe. Die Gleichung der Fläche zu finden, welche eine sich um ihre Achse drehende Parabel beschreibt.



Auflösung. Sei Az die Achse der Parabel BAC, so ist der Radius OM ($=OC$) eines darauf senkrechten Kreises, in welchem ein beliebig genommener Punct, M, der parabolischen Fläche liegt, durch die Ordinate $MQ = z$ vollkommen bestimmt. Betrachtet man nämlich Az als Abscissen-Linie, $OM = \varrho$ als Ordinate des Durchschnitts GMA, so ist, weil $AO = MQ = z$ (§ 24):

$$\varrho = \sqrt{pz} \,\ldots\ldots\ldots (1)$$

Fällt man von Q auf die Achse der x das Perpendikel $QP = y$, so ist, weil $AP = x$, $AQ^2 = x^2 + y^2$. Da aber immer $AQ = OM = \varrho$, so ist auch allemal (und für jede andere Umdrehungsfläche)

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Setzt man jetzt den Werth von ϱ aus (1) in (2), so ist:

$$pz = x^2 + y^2$$

$$z = \frac{x^2 + y^2}{p}$$

die verlangte Gleichung der Oberfläche des Paraboloids.

137.

Aufgabe. Eine Ellipse drehe sich um ihre grosse Achse; man suche die Gleichung für die Oberfläche des entstandenen Ellipsoids.



Auflösung. Sind $CB = a$, $CG = CE = b$ die halbe grosse und halbe kleine Achse, so ist für $MQ = OC = z$, $OM = \varrho$, $CP = x$, $QP = y$:

$$a^2 \varrho^2 + b^2 z^2 = a^2 b^2 \ldots (1)$$

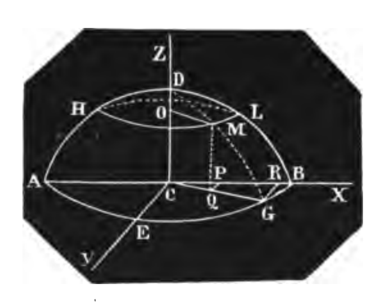
$$\varrho^2 = x^2 + y^2 \ldots\ldots (2)$$

und folglich die verlangte Gleichung:

$$a^2 (x^2 + y^2) + b^2 z^2 = a^2 b^2$$

138.

Aufgabe. Eine Ellipse, CBD, drehe sich um ihre kleine Achse, jedoch so, dass während der Umdrehung die grosse Achse sich dermassen ändert, dass ihr Endpunct B wieder eine Ellipse, BEA, beschreibt und alle Durchschnitte längs durch und senkrecht auf die kleine Achse, wie HML und DMG ebenfalls Ellipsen sind. Man sucht die Gleichung für die Oberfläche des solcherweise entstandenen Körpers, welcher ein Ellipsoid mit drei Achsen genannt wird.*)



Auflösung. Sei $AC = a$ die halbe grosse, $CD = c$ die halbe kleine, und $CE = b$ die ebenfalls gegebene halbe dritte Achse der vom Endpunct B beschriebenen Ellipse BEA; ferner sei $MQ = OC = z$, $CQ = OM = \varrho$, $CP = x$, $QP = y$ und $GR \parallel QP$ gezogen.

Die Ellipse DMG, in welcher $CD = c$ und CG die halben Achsen,

*) Man kann sich diesen Körper auf folgende Weise entstanden denken: Eine horizontale Ellipse, AEB, bewege sich parallel mit sich selbst und mit solcher stetigen Abnahme ihrer Achsen, dass deren Endpuncte, wie A und E, immer in den über AC, CD und EC, CD construirten verticalen Ellipsen bleiben.

CO = z, OM = ϱ Abscisse und Ordinate sind, giebt die bekannte Gleichung:

$$c^2 \cdot \varrho^2 + CG^2 \cdot z^2 = c^2 \cdot CG^2$$

oder weil $\varrho^2 = x^2 + y^2$:

$$c^2(x^2+y^2) = CG^2(c^2 - z^2)$$

$$CG^2 = \frac{c^2(x^2+y^2)}{c^2 - z^2}$$

Die Ellipse BEA, in welcher CB = a, CE = b die halben Achsen, CR, GR Abscisse und Ordinate sind, giebt die Gleichung:

$$a^2 \cdot GR^2 + b^2 \cdot CR^2 = a^2 b^2$$

hierin lassen sich nun GR und CR durch CG, x, y ausdrücken. Die bei P und R rechtwinkligen und ähnlichen Dreiecke geben:

$$CQ^2 : QP^2 = CG^2 : GR^2$$

$$x^2 + y^2 : y^2 = \frac{c^2(x^2+y^2)}{c^2 - z^2} : GR^2$$

$$GR^2 = \frac{c^2 y^2}{c^2 - z^2}$$

$$CP^2 : QP^2 = CR^2 : GR^2$$

$$x^2 : y^2 = CR^2 : \frac{c^2 y^2}{c^2 - z^2}$$

$$CR^2 = \frac{c^2 x^2}{c^2 - z^2}$$

Diese Werthe in obige Gleichung substituirt, kommt:

$$a^2 \frac{c^2 y^2}{c^2 - z^2} + b^2 \cdot \frac{c^2 x^2}{c^2 - z^2} = a^2 b^2$$

Die verlangte Gleichung hat also die merkwürdige Form:

$$a^2 b^2 z^2 + a^2 c^2 y^2 + b^2 c^2 x^2 = a^2 b^2 c^2$$

oder auch so geschrieben:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

II. Cylinderflächen.

139.

Eine grade Linie bewege sich so, dass sie 1) stets parallel mit sich selbst bleibt, folglich dieselbe Neigung gegen die Coordinaten-Ebenen behält, und dabei 2) stets durch eine bestimmte krumme Linie (z. B. Kreis, Parabel, Ellipse etc.) geht; alsdann beschreibt die grade Linie offenbar eine krumme Fläche, welche man Cylinderfläche nennt, und die also der Länge nach unendlich ist, sonst aber geschlossen sein kann, je nachdem die krumme Linie es ist, welche den Lauf der graden leitet, und deshalb auch die Leitlinie heisst.

Um die allgemeine Gleichung solcherweise entstandener Cylinderflächen zu finden, möge, des leichtern Verständnisses halber, erst ein besonderes Beispiel voraufgehen.

140.

Aufgabe. Sei die leitende Linie ein in der Ebene der xy liegender Kreis, dessen Mittelpunct im Anfangspunct, und dessen Gleichung folglich:

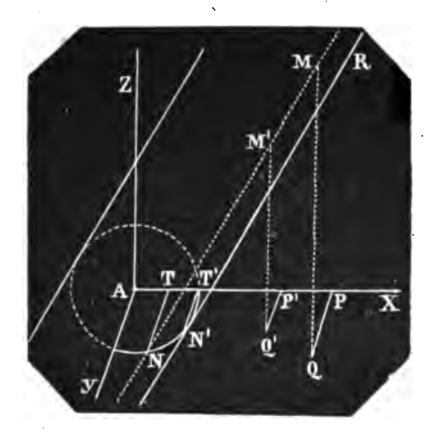
$$u^2 + t^2 = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ist, indem wir die Coordinaten des Kreises einstweilen mit besonderen Buchstaben, t, u, bezeichnen, um sie von den x, y der Fläche zu unterscheiden, welche jede beliebige Grösse haben können. Die den ganzen Kreis, stets parallel mit sich selbst, durchlaufende Linie MN beschreibt in diesem Falle einen Cylinder mit kreisrunder Grundfläche, für dessen Seitenfläche wir die Gleichung suchen.

Die Projections-Gleichungen der beschreibenden graden Linie seien für zwei verschiedene Lagen MN, RN'.

$$MN \begin{cases} x = az + m \\ y = bz + n \end{cases} \qquad RN' \begin{cases} x = az + m' \\ y = bz + n' \end{cases}$$

Die Coefficienten a, b bestimmen die Neigung der sich bewegenden graden Linie gegen die Coordinaten-Ebenen, und sind also unveränderlich; die Coefficienten m, n aber müssen sich mit dem Fortschreiten der Linie ändern. Diese Coefficienten m, n, m', n' sind offenbar nichts anders, als die Coordinaten der Puncte N, N'... in welchen die beschreibende grade Linie



(MN, RN'....) die Ebene der xy schneidet und wo immer $z=0$ ist. Denn für $z=0$ geben die Gleichungen der Linien MN, RN'...

$x=m=$ AT, $x=m'=$ A T'
$y=n=$ NT, $y=n'=$ N'T'

Damit also diese Durchschnittspuncte der Linien MN, RN'... mit der Ebene der xy in die Peripherie des durch seine Gleichung gegebenen Kreises fallen, müssen die Coordinaten derselben m, n, m', n'.... mit denen des Kreises t, u, t', u'... übereinstimmen, und folglich wie diese von einander abhängen. Die allgemeinen Projections-Gleichungen der durch den Kreis gehenden parallelen Linien MN, RN'.... sind also

$$x=az+t \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$
$$y=bz+u \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

Denkt man sich hierin für t alle möglichen und die dazu gehörenden Werthe von $u=\sqrt{r^2-t^2}$ gesetzt, so erhielte man die besondern Gleichungen für alle parallelen Seitenlinien des Cylinders. Um nun alle diese besondern Gleichungen in die für die Oberfläche zusammenfliessen zu lassen, müssen wir die Coordinaten t, u der Durchschnittspuncte durch x, y, z ausdrücken. Aus obigen Gleichungen folgt:

$$t=x-az$$
$$u=y-bz$$

in Worten: Welche zusammengehörigen Werthe für t und u in (2) und (3) gesetzt werden, und welche Werthe dann x und y bei der entsprechenden Seitenlinie (z. B. MN) für ein beliebig genommenes z, = MQ, M'Q'...... auch naben mögen ($x=$ AP, AP'....$y=$ QP, Q'P'.. .), so sind doch immer die Coordinaten des Durchschnittspuncts dieser Linie $t=x-az$ und $u=y-bz$.

Unter diesen Ausdrücken für t und u muss also dieselbe Beziehung Statt haben, wie unter t und u. Substituiren wir

demnach diese Ausdrücke in (1), so kommt die verlangte Gleichung der Cylinderfläche, nämlich:

$$(y-bz)^2+(x-az)^2=r^2$$
$$z=\frac{ax+by\pm\sqrt{(a^2+b^2)r^2-(ay-bx)^2}}{a^2+b^2}$$

141.

Seien nun allgemein:

$$x=\varphi(z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$y=\psi(z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

die beiden Projections-Gleichungen einer dadurch bestimmten Leitlinie im Raume von einfacher oder doppelter Krümmung, so wie:

$$x=az+\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
$$y=bz+\beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

die beiden Projections-Gleichungen der sich durch erstere, stets parallel mit sich selbst, bewegenden graden Linie, wo also a und b beständig, α und β aber veränderlich und von einander abhängig sind.

Diese Grössen α und β sind offenbar die veränderlichen Coordinaten der Puncte, in welchen die sich bewegende grade Linie die Ebene der xy schneidet. Die Gleichung zwischen α und β ist folglich die Gleichung derjenigen Linie, welche die grade in der Ebene xy beschreibt. Diese Linie $\beta=f(\alpha)$ muss nun erst gefunden, und dann als neue Leitlinie der alten substituirt werden.

Die zwei Paar Gleichungen 1, 2, 3, 4 müssen für alle Durchschnittspuncte beider Linien zugleich Statt finden, d. h. dieselben Werthe, welche für die gemeinschaftlichen z der Durchschnittspuncte die Gleichungen 1, 2 für x und y geben, müssen für dieselben z auch 3, 4 für x und y geben. Wir brauchen daher nur, um die Gleichung zwischen α und β zu erhalten, die Coordinaten x, y, z jener gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte zu eliminiren. Setzen wir deshalb die durch z ausgedrückten Werthe von x, y aus (1) und (2) in (3) und (4), so kommt:

$$\varphi(z)=az+\alpha$$
$$\psi(z)=bz+\beta$$

Eliminiren wir nun aus diesen beiden Gleichungen die gemeinschaftliche Ordinate z, so erhalten wir die fragliche Gleichung der neuen Leitlinie, nämlich eine Beziehung zwischen α, β und verschiedenen beständigen Grössen a, b...., welche wir durch:

$$\beta = f(\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

bezeichnen. Da nun aber immer, zufolge (3) und (4):

$$\alpha = x - az$$
$$\beta = y - bz$$

so ist auch, indem man diese Ausdrücke für α und β in die gefundene Gleichung (5) substituirt:

$$y - bz = f(x - az)$$

die Gleichung der durch a, b und die gegebene Leitlinie (3), (4) bestimmten Cylinderfläche.

III. Kegelflächen.

142.

Bewegt sich eine grade Linie so, dass sie 1) wieder durch eine bestimmte Leitlinie und dabei 2) noch stets durch einen festen Punct geht, so beschreibt die grade Linie zwei mit ihrer Spitze gegen einander gekehrte sogenannte Kegelflächen, die der Länge nach unbegrenzt sind, sonst aber sich nach der Ausdehnung der Leitlinie richten, und geschlossen oder offen sein können.

Um die allgemeine Gleichung für die solcherweise beschriebenen Flächen zu finden, möge ein besonderer Fall voraufgehen.

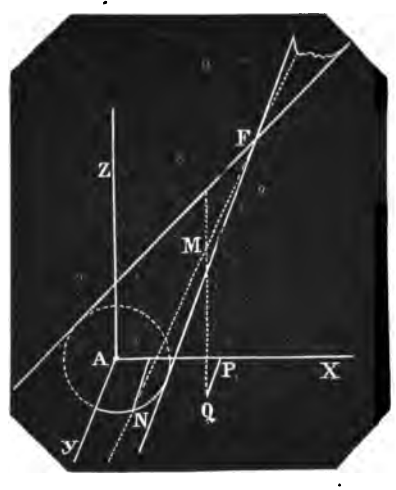
143.

Sei die Leitlinie ein in der Ebene der xy liegender Kreis, dessen Mittelpunct im Anfangspunct A und dessen Gleichung also:

$$y^2 + x^2 = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

seien ferner a, b, c die Coordinaten des gegebenen festen Puncts F, so beschreibt die stets durch ihn und den Kreis gehende

Linie einen schiefen Kegel mit kreisrunder Grundfläche. Man suche die Gleichung der Seitenfläche.



Auflösung. Seien die Projections-Gleichungen der die Fläche beschreibenden Linie in irgend einer Lage FN:

$$x = mz + \alpha \ldots (2)$$
$$y = nz + \beta \ldots (3)$$

so ist beim Fortschreiten der Linie nicht allein α und β, sondern auch m und n veränderlich.

Die Grössen α, β sind offenbar wieder die Coordinaten der Durchschnittspuncte mit der Ebene der x, y, und weil diese in der Leitlinie liegen sollen, so hat man die Bedingung:

$$\beta^2 + \alpha^2 = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Die Coefficienten m, n lassen sich durch x, y, z; a, b, c ausdrücken. Denn weil die Linie stets durch den festen Punct F (a, b, c) gehen, also für $z = c$, $x = a$ und $y = b$ sein soll so hat man die Bedingungen:

$$a = mc + \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$
$$b = nc + \beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Subtrahirt man (5) von (2) und (6) von (3), so kommt:

$$\begin{aligned} x - a &= m(z - c) \\ y - b &= n(z - c) \end{aligned} \quad \text{hieraus:} \quad \begin{aligned} m &= \frac{x - a}{z - c} \\ n &= \frac{y - b}{z - c} \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2) und (3) geben:

$$\alpha = x - mz = x - \frac{x - a}{z - c} . z = \frac{az - cx}{z - c}$$

$$\beta = y - nz = y - \frac{y - b}{z - c} . z = \frac{bz - cy}{z - c}$$

Diese Werthe von α und β endlich in (4) substituirt, erhält man:

$$(bz-cy)^2+(az-cx)^2=r^2(z-c)^2$$

als die verlangte Gleichung für die Oberfläche des Kegels.

Für den graden Kegel, dessen Spitze in der Achse der z liegt, ist $a=0$, $b=0$ und folglich die Gleichung seiner Oberfläche:

$$c^2(y^2+x^2)=r^2(z-c)^2$$

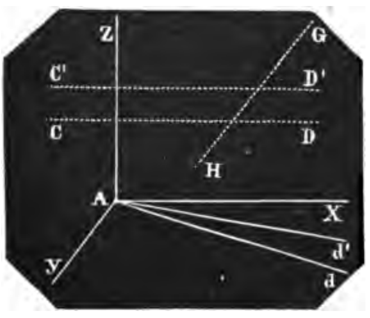
$$z=c\pm\frac{c}{r}(\sqrt{x^2+y^2})$$

Liegt die Leitlinie nicht in der Ebene der xy, sondern im Raume, so findet man die allgemeine Gleichung der Kegelfläche durch ähnliche Schlüsse, wie in § 141. Sie ist dann:

$$\frac{y-b}{z-c}=f\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$$

144.

Suchen wir endlich noch die Gleichung derjenigen Art Flächen, welche eine grade Linie beschreibt, indem sie 1) längs einer beliebig im Raume gegebenen Leitlinie und zugleich längs der verticalen Achse der z hingleitet, und dabei 2) stets horizontal, also immer parallel mit der Ebene der xy bleibt, und sich somit (im Allgemeinen) fortschreitend und drehend zugleich bewegt.



Sei z. B. die Leitlinie eine grade, HG, und ihre Projections-Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} x=az+c \dots\dots (1) \\ y=bz+d \dots\dots (2) \end{array}\right\}$$

seien ferner die Projections-Gleichungen der längs dieser und der Achse der z gleitenden stets horizontalen Linie in der Lage CD:

$$\left.\begin{array}{l} y=mx \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3) \\ z=0.x+h \dots\dots\dots\dots\dots (4) \end{array}\right\}$$

Für alle Puncte derselben Linie CD sind m und h beständig, sobald aber die Linie fortschreitet, muss sich ausser h (die Höhe)

auch das davon abhängige m geändert haben; denn wenn nicht HG mit ZZ in einer auf xAy senkrechten Ebene liegt, so können auch CD und C′D′... nicht in einer Ebene liegen, und m die Tangente des Winkels, den die immer durch A gehende Projection von CD, C′D′... mit der Achse der x macht, muss für jede Projection eine andere sein.

Um die Gleichung zwischen m und h zu finden, bemerke man, dass für alle Durchschnittspuncte, M, M′.... beider Linien CD, GH die Coordinaten derselben x, y, z, in beiden Paar Gleichungen einerlei Werth haben müssen. Um sie daher zu eliminiren, setze man den Werth von $z=h$ aus (4) in (1) und (2), so ist:

$$x=ah+c$$
$$y=bh+d$$

Diese Werthe von x und y in (3) substituirt, erhält man die Gleichung zwischen m und h, nämlich:

$$bh+d=m(ah+c) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Nach den Gleichungen (3) und (4) ist immer:

$$m=\frac{y}{x},\ h=z$$

Diese Ausdrücke für m und h in (5) gesetzt, kommt die gesuchte Gleichung der auf diese Weise entstandenen sogenannten windschiefen (conoidischen) Fläche:

$$bz+d=\frac{y}{x}(az+c)$$

$$z=\frac{dx-cy}{ay-bx}$$



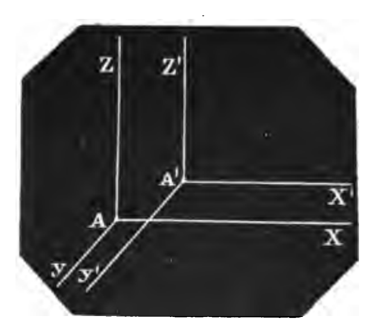
*) Vierzehntes Buch.

Coordinaten-Verwandlung.

Coordinaten-Verwandlungen sind zuweilen in der analytischen Geometrie im Raume aus denselben Gründen erforderlich, wie in der analytischen Geometrie in der Ebene. Die folgenden §§ werden zeigen, wie man diese Verwandlungen bewirken kann.

145.

1. Verlegung des Anfangspuncts, indem man die neuen Coordinaten-Achsen und Ebenen den alten parallel nimmt.



Seien x', y', z' die neuen mit den alten x, y, z parallelen Coordinaten eines Punctes, M, und a, b, c die Coordinaten des neuen Anfangspuncts A', so ist, mit Beachtung der Vorzeichen von a, b, c, allemal:

$$x = x' + a$$
$$y = y' + b$$
$$z = z' + c$$

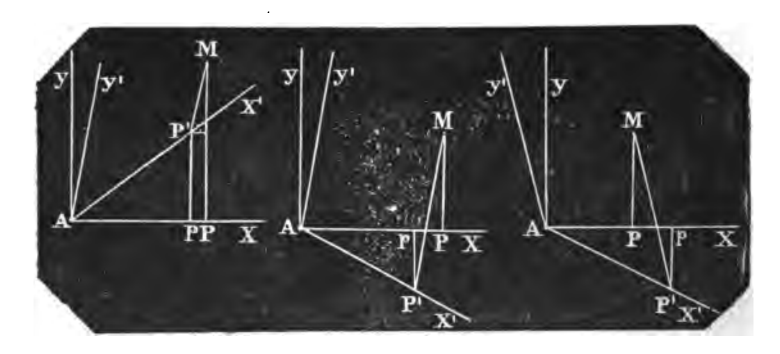
Diese Ausdrücke für x, y, z in die gegebene Gleichung einer Fläche oder in die Projections-Gleichungen einer Linie gesetzt, erhält man die Beziehung zwischen den neuen Coordinaten x', y', z', statt deren man wieder x, y, z schreiben kann.

Man sieht, dass durch diese Coordinaten-Verwandlung der Grad der Gleichungen nicht geändert wird. Dies gilt auch von den folgenden, bei welchen wir, der Einfachheit wegen, voraussetzen können, dass der Anfangspunct unverändert bleibt, indem man sonst die alten Achsen, wie eben gezeigt, erst parallel mit sich selbst nach dem neuen Anfangspunct verschieben kan-

Hülfssatz. Seien $x = AP$ und $y = MP$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punctes, M, und $x' = AP'$, $y' = MP'$ die neuen Coordinaten desselben Puncts für zwei andere in derselben Ebene und aus demselben Anfangspunct ganz beliebig gezogene Achsen, Ax', Ay', und die Winkel, welche die neuen Achsen mit den alten machen, nämlich $x'Ax$, $x'Ay$, $y'Ax$, $y'Ay$, der Kürze halber durch Auslassung des Scheitel-Buchstabens A, mit $(x'x)$, $(x'y)$, $(y'x)$, $(y'y)$, bezeichnet, so ist:

1. die Projection einer der neuen Coordinaten auf eine der alten Achsen gleich dem Product aus der neuen Coordinate und dem Cosinus des Winkels, den sie (oder ihre Verlängerung mit der Projections-Achse macht, und folglich negativ zu nehmen, wenn dieser Winkel stumpf ist.

2. die algebraische Summe der Projectionen beider neuen Coordinaten auf eine der alten Achsen ist immer gleich der darauf liegenden alten Coortinade.

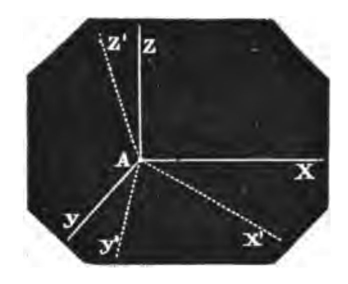


Denn Ap ist die Projection von $AP' = x'$ und pP die Projection von $MP' = y'$. Nun ist $Ap = x'.\cos(x'x)$, $pP = y$ cos $(y'x)$. Iu Figur 3 ist $\cos(y'x)$, also auch $y'.\cos(y'x) = pP$ negativ. Daher für alle möglichen Lagen der neuen Achsen $AP = Ap + pP$. Dasselbe gilt nun von den Projectionen der beiden neuen Coordinaten auf die alte Achse Ay, mithin ist immer:

$$x = x'\cos(x'x) + y'\cos(y'x)$$
$$y = x'\cos(x'y) + y'\cos(y'y)$$

146.

Aufgabe. Von einem rechtwinkligen System auf ein beliebig schiefwinkliges überzugehen.



Auflösung. Seien x, y z die alten rechtwinkligen, und x', y', z' die neuen schiefwinkligen Coordinaten eines Punctes, M. Denkt man sich nun die neuen Coordinaten x', y', z' auf die alte Achse Ax projicirt, indem man jede mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, den sie mit dieser Achse macht, so ist (wie man sich allenfalls durch eine anschaulichere Figur leicht überzeugt, für jede beliebige Lage der neuen Achsen) die algebraische Summe jener drei Projectionen auf die Achse der x gleich der auf dieser Achse gemessenen alten Coordinate AP$=x$, und da dasselbe auch von den Projectionen auf die beiden andern Achsen gilt, so hat man ganz einfach:

$$x = x' \cos(x'x) + y' \cos(y'x) + z' \cos(z'x) \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$y = x' \cos(x'y) + y' \cos(y'y) + z' \cos(z'y) \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$z = x' \cos(x'z) + y' \cos(y'z) + z' \cos(z'z) \ldots\ldots\ldots (3)$$

Unter je drei der neuen beständigen Winkel, welche die neuen Achsen mit den alten bilden, und von welchen je drei wiederum nur zwei ganz beliebig sind, findet nach § 111 noch die Beziehung Statt:

$$\cos^2(x'x) + \cos^2(x'y) + \cos^2(x'z) = 1 \ldots\ldots\ldots (4)$$
$$\cos^2(y'x) + \cos^2(y'y) + \cos^2(y'z) = 1 \ldots\ldots\ldots (5)$$
$$\cos^2(z'x) + \cos^2(z'y) + \cos^2(z'z) = 1 \ldots\ldots\ldots (6)$$

Sollen die neuen Achsen wieder rechtwinklig auf einander, folglich die drei Winkel $(x'y')$, $(x'z')$, $(y'z')$, welche sie mit einander machen, rechte sein, so sind den vorhergehenden drei Bedingungen (4), (5), (6) zufolge § 112 noch folgende drei hinzu zu fügen:

$$\cos(x'x) \cdot \cos(y'x) + \cos(x'y) \cdot \cos(y'y) + \cos(x'z) \cdot \cos(y'z) = 0 \ldots (7)$$
$$\cos(x'x) \cdot \cos(z'x) + \cos(x'y) \cdot \cos(z'y) + \cos(x'z) \cdot \cos(z'z) = 0 \ldots (8)$$
$$\cos(y'x) \cdot \cos(z'x) + \cos(y'y) \cdot \cos(z'y) + \cos(y'z) \cdot \cos(z'z) = 0 \ldots (9)$$

so dass also, vermöge der sechs Bedingungs-Gleichungen in diesem Fall von den neun beständigen Winkeln nur drei willkürlich sind.

Bleibt der Anfangspunct nicht derselbe, so muss man den allgemeinen Ausdrücken für x, y, z noch die Coordinaten a, b, c des neuen Anfangspuncts mit ihren Vorzeichen hinzufügen.

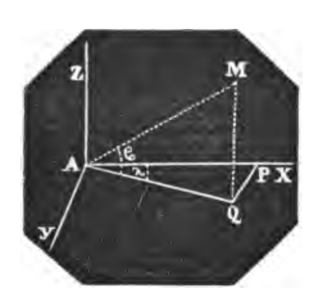
148.

Für den besondern Fall, wo die eine Achse, z. B. die der z dieselbe, und die beiden Ax', Ay' in der Ebene der xy bleiben, erhält man aus den allgemeinen Formeln (1), (2), (3) die folgenden einfachern:

$$x = x' \cos(x'x) + y' \cos(y'x)$$
$$y = x' \cos(x'y) + y' \cos(y'y)$$
$$z = z'$$

149.

Aufgabe. Rechtwinklige Coordinaten in Polar-Coordinaten zu verwandeln.



Auflösung. Es sei der Pol im Anfangspunct und der von ihm nach einem beliebigen Punct, M (x, y, z), gezogene Radius vector AM $= \varrho$, der Winkel MAQ, den der Radius vector mit seiner Projection auf die Ebene xy macht, $= \theta$, und der Winkel, den dieser projicirte Radius vector AQ $(= \varrho \cos \theta)$ mit der Achse der x macht, $= \lambda$, so ist:

$$x = \varrho \cos \theta \cdot \cos \lambda$$
$$y = \varrho \cos \theta \cdot \sin \lambda$$
$$z = \varrho \sin \theta$$

Liegt der Pol nicht im Anfangspunct A, sondern in O (a, b, c), so hat man:

$$x = a + \varrho \cos \theta \cdot \cos \lambda$$
$$y = b + \varrho \cos \theta \cdot \sin \lambda$$
$$z = c + \varrho \sin \theta$$

Die Anwendung dieser, besonders in der Integralrechnung und Astronomie nützenden Polar-Coordinaten bestimmt die Ausdehnung, in welcher man die beiden von einander unabhängigen Winkel λ, θ nehmen muss, ob von 0 bis $\pm 90^0$, bis $\pm 180^0$, oder bis 360^0.

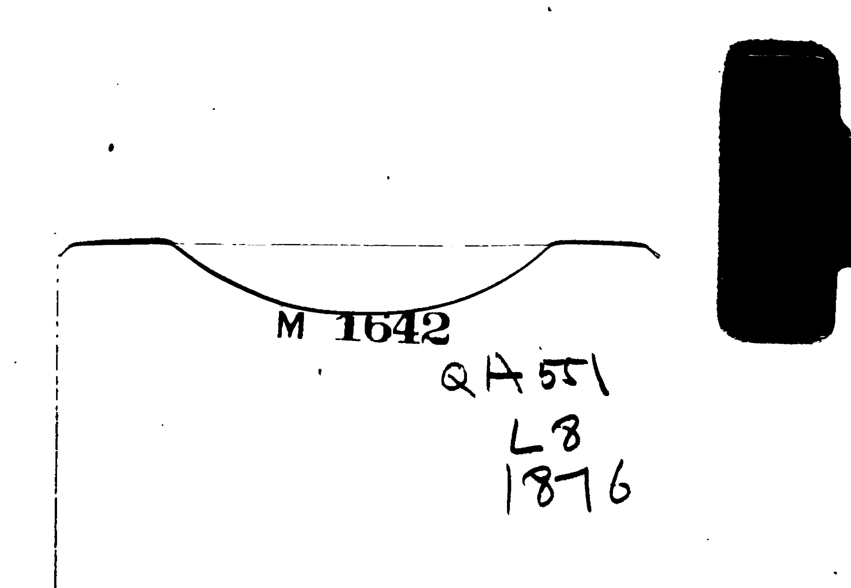
Bemerkungen.

1. Wer seine Studien der analytischen Geometrie vorläufig nur auf das Allernothwendigste für den practischen Gebrauch beschränken will, mag die mit einem * bezeichneten Sätze und Capitel so lange ungelesen lassen, bis er das Bedürfniss dazu fühlt.

2. In mathematischen Schriften kommen oftmals griechische Buchstaben vor, deshalb hier das griechische Alphabet und dessen Aussprache:

Α	α	alpha	Ι	ι	jota	Ρ	ϱ	rho
Β	ϐ	(β) beta	Κ	κ	kappa	Σ	σ	(ς) sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lamda	Τ	τ	tau
Δ	δ	delta	Μ	μ	mü	Υ	υ	üpsilon
Ε	ε	epsilon	Ν	ν	nü	Φ	φ	phi
Ζ	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	Χ	χ	chi
Η	η	etha	Ο	ο	omikron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	(ϑ) theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega.

Pierer'sche Hofbuchdruckerei. Stephan Geibel & Co. in Altenburg.


M 1642
QA 551
L8
1876

